

# Problemes de Regulació Automàtica

Josep Vehí, Carles Pous, Inès Ferrer

October 4, 2001



# Index

<b>1 Fonaments Matemàtics</b>	<b>1</b>
1.1 Transformada de Laplace . . . . .	1
<b>2 Models Matemàtics</b>	<b>5</b>
2.1 Funció de transferència. Diagrames de blocs. . . . .	5
2.2 Models matemàtics de sistemes físics . . . . .	9
2.3 Representació en espai d'estats . . . . .	15
<b>3 Domini temporal</b>	<b>19</b>
3.1 Estabilitat . . . . .	19
3.2 Error estacionari . . . . .	22
3.3 Resposta transitòria . . . . .	30
3.4 Disseny temporal . . . . .	38
<b>4 Lloc de les arrels</b>	<b>47</b>
4.1 Construcció del lloc de les arrels . . . . .	47
4.2 Disseny en el lloc de les arrels . . . . .	48
<b>5 Domini freqüencial</b>	<b>55</b>
5.1 Diagrames de Bode . . . . .	55
5.2 Estabilitat relativa . . . . .	58
5.3 Disseny freqüencial . . . . .	61
<b>6 Espai d'estats</b>	<b>71</b>
6.1 Anàlisi en l'espai d'estats . . . . .	71
6.2 Disseny de controladors en l'espai d'estats . . . . .	71
<b>7 MATLAB</b>	<b>75</b>
<b>A Transformades de Laplace</b>	<b>79</b>
A.1 Taula de transformades directes . . . . .	79
A.2 Propietats de la transformada de Laplace . . . . .	80
<b>B Fórmules útils</b>	<b>81</b>
B.1 Resposta temporal . . . . .	81
B.2 Resposta freqüencial . . . . .	81
B.3 Fórmules de sintonia de reguladors . . . . .	82

<b>C</b>	<b>Compensadors</b>	<b>85</b>
C.1	Compensador d'avanç de fase . . . . .	85
C.2	Compensador de retard de fase . . . . .	87
C.3	Compensador d'avanç-retard . . . . .	89
<b>D</b>	<b>Regles generals per a construir el lloc geomètric de les arrels</b>	<b>91</b>
<b>E</b>	<b>Aproximació a sistemes d'ordre superior</b>	<b>93</b>
<b>F</b>	<b>Teoria de matrius</b>	<b>97</b>
F.1	Definicions . . . . .	97
F.2	Operacions elementals amb matrius . . . . .	98

# 1. FONAMENTS MATEMÀTICS

---

## 1.1 Transformada de Laplace

**Problema 1** Trobeu les transformades de Laplace de les funcions següents: Trobeu les transformades de Laplace de les funcions

- 1)  $g(t) = 5te^{-5t}u_s(t)$                       3)  $g(t) = 2e^{-2t}\sin(2t)u_s(t)$   
2)  $g(t) = (t\sin 2t + e^{-2t})u_s(t)$       4)  $g(t) = \sin 2t \cos 2tu_s(t)$

**Problema 2** Trobeu la transformada de Laplace de la funció següent:

$$g(t) = \begin{cases} t+1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 2 \\ 2-t & 2 \leq t < 3 \\ 0 & t \geq 3 \end{cases}$$

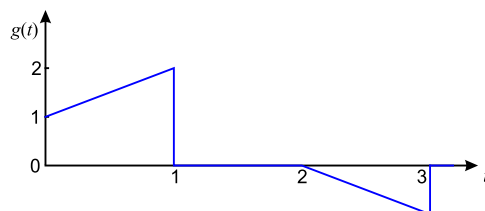


Figura 1-1

**Problema 3** Quan  $f(t)$  és una funció periòdica, amb període  $T$ , llavors compleix:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\int_0^T f(t) e^{-st} dt}{1 - e^{-Ts}}$$

Utilitzant aquesta propietat, trobeu la transformada de Laplace de les funcions de la Figura 1-2.

**Problema 4** Calculeu la transformada de Laplace de la funció  $x(t)$  representada a la Figura 1-3.

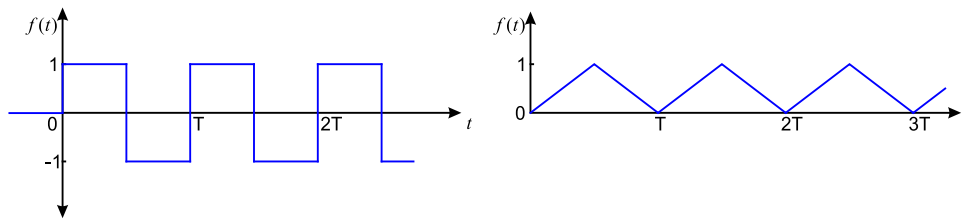


Figura 1-2

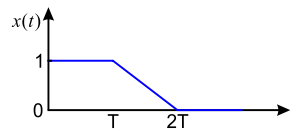


Figura 1-3

**Problema 5** Trobeu la transformada inversa de Laplace de les funcions següents:

- |  |   |
|--|---|
| 1) $G(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$           | 6) $G(s) = \frac{10}{(s+1)^2(s+3)}$               |
| 2) $G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)}$            | 7) $G(s) = \frac{100(s+2)}{s(s^2+4)(s+1)}e^{-s}$  |
| 3) $G(s) = \frac{2s+12}{s^2+2s+5}$           | 8) $G(s) = \frac{2(s+1)}{s(s^2+s+2)}$             |
| 4) $G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$                | 9) $G(s) = \frac{2(s^2+s+1)}{s(s+1.5)(s^2+5s+5)}$ |
| 5) $G(s) = \frac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)}$ | 10) $G(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2+6s+10}$            |

**Problema 6** Verifiqueu que es compleix la igualtat següent :

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{3s}{(s^2+1)(s^2+4)} \right] = \cos t - \cos 2t$$

**Problema 7** Trobeu  $i(t)$  suposant que es tenen condicions inicials nul·les:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} - i(t) = 25 + e^{2t}$$

**Problema 8** Integreu (trobeu  $x(t)$ ) l'equació diferencial quan  $y = \sin(t)$ :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{4dx}{dt} + x = \frac{dy}{dt} + y$$

**Problema 9** Resoldre les equacions diferencials següents mitjançant la transformada de Laplace:

$$1) \quad \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 5 \frac{df(t)}{dt} + 4f(t) = e^{-2t} \quad \text{condicions inicials zero}$$

$$2) \quad \begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -2x_1(t) - 3x_2(t) + 1, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0 \end{cases}$$

**Problema 10** Obteniu la resposta graó unitari, rampa unitària i impuls unitari del sistema següent :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$





## 2. MODELS MATEMÀTICS

### 2.1 Funció de transferència. Diagrames de blocs.

**Problema 11** Les equacions diferencials següents representen sistemes lineals invariants en el temps, on  $r(t)$  denota l'entrada i  $y(t)$  la sortida. Trobeu la funció de transferència  $\frac{Y(s)}{R(s)}$  per a cadascun dels sistemes:

- 1)  $\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 3\frac{dr(t)}{dt} + r(t)$
- 2)  $\frac{d^4 y(t)}{dt^4} + 10\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 5r(t)$
- 3)  $\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 10\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) + 2 \int_0^t y(\tau) d(\tau) = \frac{dr(t)}{dt} + 2r(t)$
- 4)  $2\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = r(t) + r(t-1)$

**Problema 12** Un sistema lineal multivariable, amb entrades  $r_1(t)$  i  $r_2(t)$  i sortides  $y_1(t)$  i  $y_2(t)$ , està descrit per les equacions diferencials següents:

$$\begin{cases} \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + 2\frac{dy_1(t)}{dt} + 3y_2(t) = r_1(t) + r_2(t) \\ \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + 3\frac{dy_1(t)}{dt} + y_1(t) - y_2(t) = r_2(t) + \frac{dr_1(t)}{dt} \end{cases}$$

1. Trobeu les funcions de transferència següents:

$$\left. \frac{Y_1(s)}{R_1(s)} \right|_{R_2=0} \quad \left. \frac{Y_2(s)}{R_1(s)} \right|_{R_2=0} \quad \left. \frac{Y_1(s)}{R_2(s)} \right|_{R_1=0} \quad \left. \frac{Y_2(s)}{R_2(s)} \right|_{R_1=0}$$

2. Trobeu una representació del sistema en espai d'estats, agafant com a estats  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $\dot{Y}_1$  i  $\dot{Y}_2$ .

**Problema 13** Trobeu la funció de transferència del sistema de la Figura 2-1 si:

$$G_1(s) = \frac{6}{s+2} \quad \text{i} \quad G_2(s) = \frac{4}{s+1}$$

Trobeu  $y(t)$  si l'entrada és una funció graó i representeu-la gràficament. A què es deu aquest comportament?

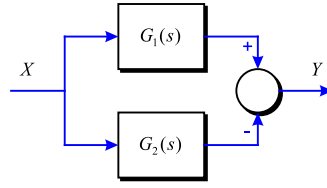


Figura 2-1

**Problema 14** Donat el sistema de control d'una antena com el de la Figura 2-2, on  $T_W$  és el parell de pertorbació deguda al vent, determineu l'angle de sortida  $\theta_Y$  del sistema en funció de l'angle d'entrada  $\theta_Y$  i del parell de pertorbació del vent  $T_W$ .

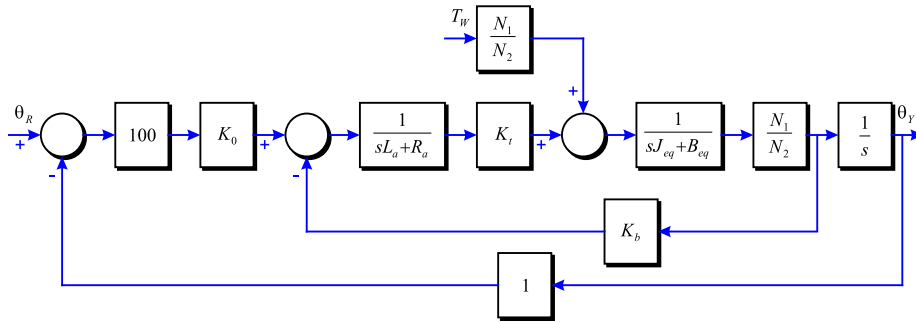


Figura 2-2

**Problema 15** A partir del diagrama de blocs de la Figura 2-3, trobeu les funcions de transferència següents:

$$\left. \frac{Y(s)}{R(s)} \right|_{N=0} \quad \left. \frac{Y(s)}{E(s)} \right|_{N=0} \quad \left. \frac{Y(s)}{N(s)} \right|_{R=0}$$

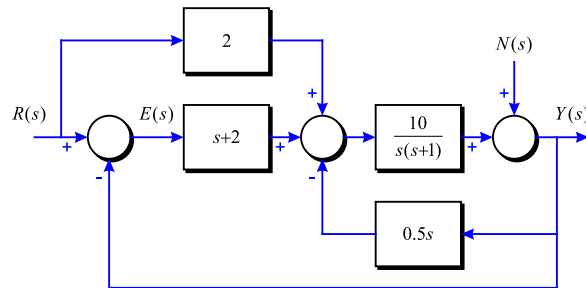


Figura 2-3

**Problema 16** La Figura 2-4 mostra el diagrama de blocs del sistema de control d'una antena de camp de col·lectors solars. El senyal  $N(s)$  denota les pertorbacions de les ràfegues

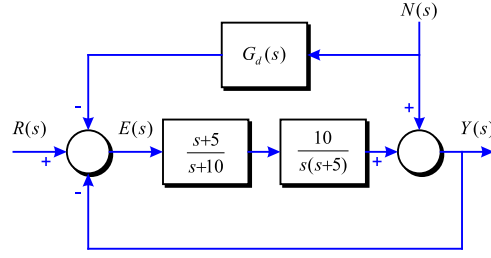


Figura 2-4

de vent que actuen sobre l'antena. La funció de transferència de la trajectoria directa  $G_d(s)$  s'utilitza per eliminar l'efecte  $N(s)$  sobre la sortida  $Y(s)$ . Trobeu la funció de transferència següent:

$$\left. \frac{Y(s)}{N(s)} \right|_{R=0}$$

Determineu l'expressió  $G_d(s)$  de manera que  $N(s)$  sigui eliminat per complet.

**Problema 17** La Figura 2-5 mostra un sistema de control amb realimentació condicional:

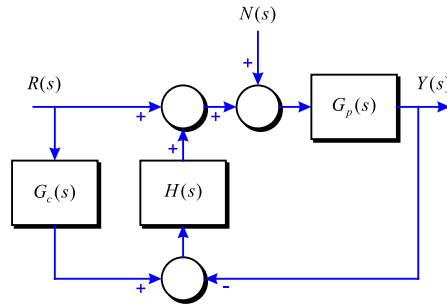


Figura 2-5

La funció de transferència  $G_p(s)$  denota el procés controlat i  $G_c(s)$  i  $H(s)$  són les funcions de transferència del controlador.

1. Trobeu les funcions de transferència següents en funció de  $G_p(s)$ ,  $G_c(s)$  i  $H(s)$ :

$$\left. \frac{Y(s)}{R(s)} \right|_{N=0} \quad \left. \frac{Y(s)}{N(s)} \right|_{R=0}$$

2. Suposant que:

$$G_p(s) = G_c(s) = \frac{100}{(s+1)(s+5)}$$

Trobeu la resposta de sortida  $y(t)$  quan  $N(s) = 0$  i  $r(t) = u(t)$ .

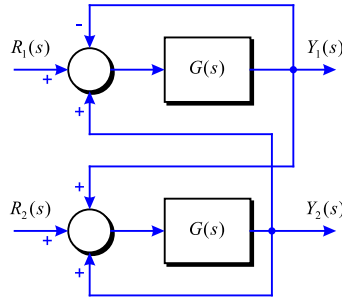


Figura 2-6

**Problema 18** L'acoblament d'un motor de turbohèlix es mostra a la Figura 2-6. Els senyals es defineixen com:

- $R_1(s)$  : flux de combustible
- $R_2(s)$  : angle de l'aspa de l'hèlix
- $Y_1(s)$  : velocitat del motor
- $Y_2(s)$  : temperatura interna de la turbina

Trobeu les funcions de transferència següents :

$$\left. \frac{Y_1(s)}{R_1(s)} \right|_{R_2=0} \quad \left. \frac{Y_1(s)}{R_2(s)} \right|_{R_1=0} \quad \left. \frac{Y_2(s)}{R_1(s)} \right|_{R_2=0} \quad \left. \frac{Y_2(s)}{R_2(s)} \right|_{R_1=0}$$

**Problema 19** El diagrama de blocs d'un tren elèctric es mostra a la Figura 2-7.

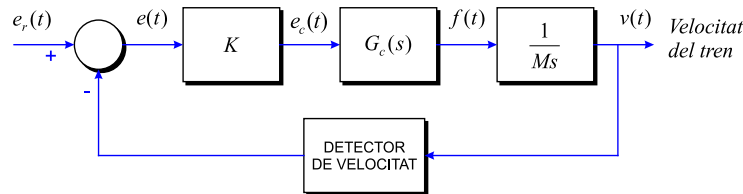


Figura 2-7

Els paràmetres del sistema i les seves variables, són:

- $e_r(t)$  : voltatge que representa la velocitat del tren desitjada, en volts
- $v(t)$  : velocitat del tren, en peus/s
- $M$  : massa del tren.  $M = 30000$  lliu/s<sup>2</sup>
- $K$  : guany de l'amplificador
- $K_t$  : guany de l'indicador de velocitat.  $K_t = 0.15$  V/peus/s

Per a determineu la funció de transferència del controlador, s'aplica una funció graó de 1 V a l'entrada del controlador. La sortida del controlador es mesura i descriu mitjançant l'equació següent :

$$f(t) = 100 (1 - 0.3e^{-6t} - 0.7e^{-10t}) \cdot u_s(t)$$

1. Trobeu la funció de transferència  $G_c(s)$  del controlador.
2. Obteniu la funció de transferència de la trajectòria directa  $\frac{V(s)}{E(s)}$  del sistema. En aquest cas, la trajectòria de realimentació és oberta.
3. Obteniu la funció de transferència en llaç tancat  $\frac{V(s)}{E_r(s)}$  del sistema.

**Problema 20** Repetiu el problema 19 si l'equació que determina la funció de transferència del controlador ve descrita per:

$$f(t) = 100 \left( 1 - 0.3e^{-6(t-0.5)} \right) \cdot u_s(t - 0.5)$$

## 2.2 Models matemàtics de sistemes físics

**Problema 21** Trobeu les equacions que expressen matemàticament el comportament del sistema de la Figura 2-8:

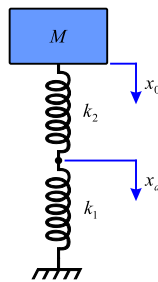


Figura 2-8

**Problema 22** Aplicant les lleis de Newton pel moviment circular, trobeu l'equació diferencial que descriu el moviment del pèndol de la Figura 2-9 (angle  $\theta$ ) quan se li aplica un parell  $M$ .

**Problema 23** Es vol estudiar el sistema de suspensió d'un vehicle. Per a simplificar el problema a l'anàlisi del sistema en una dimensió, s'utilitzarà un model que representa  $\frac{1}{4}$  del vehicle (el comportament d'una de les rodes). El diagrama que representa aquest sistema és el de la Figura 2-10.

Trobeu la funció de transferència  $\frac{X_1(s)}{W(s)}$ .

**Problema 24** Suposant que  $n_0$  és petit i que les variacions de les variables respecte l'estat d'equilibri són també petites, determineu l'expressió de  $G(s)$  per a que el diagrama de blocs donat a la Figura 2-11 correspongui al sistema de dipòsits proposat a la mateixa Figura. Considereu que el control és només proporcional tal com es pot veure al diagrama de blocs. Determineu l'expressió de  $H$  en funció de  $H_r$  i de  $N$ .

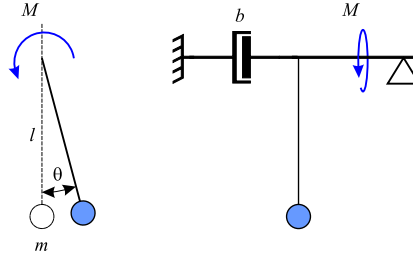


Figura 2-9

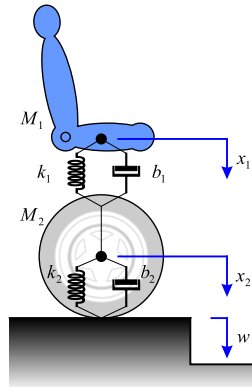


Figura 2-10

**Problema 25** Donat el sistema de dos dipòsits de la Figura 2-12, i considerant que es produeixen canvis petits entorn del punt d'equilibri, determineu la funció de transferència  $\frac{Q_2(s)}{Q_i(s)}$ . Es pot obtenir aquesta funció de transferència com a producte de les funcions de transferència de cada dipòsit per separat? Per què? Obteniu també la funció de transferència de  $\frac{H_1(s)}{Q_i(s)}$ .

**Problema 26** Es vol modelar el sistema de posicionament del capçal d'un disc dur de la Figura 2-13 per tal de poder realitzar anàlisi i proves de diversos controladors de manera senzilla. Es sap que el moviment del capçal és produït per un motor DC d'imans permanents que té un comportament similar al motor DC d'armadura. Les equacions que el regeixen son les següents:

$$\begin{aligned} T_m(t) &= K_m \cdot i(t) \\ v(t) &= R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} \\ T_L(t) &= J \frac{d\omega(t)}{dt} + b\omega(t) \\ T_m(t) - T_d(t) &= T_L(t) \end{aligned}$$

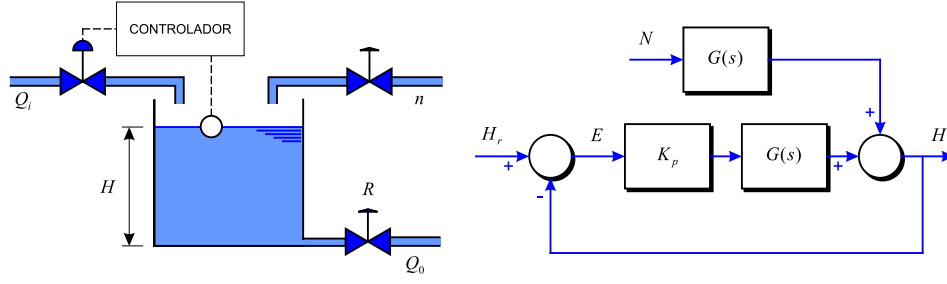


Figura 2-11

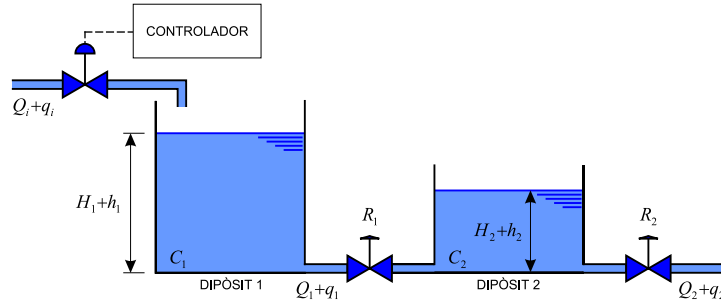


Figura 2-12

on:

- $T_m$  : Parell del motor en  $(N \cdot m \cdot s)$  que es produeix al circular-hi un corrent  $I$  (A)
- $V$  : Tensió aplicada en bornes del motor (Volts)
- $T_L$  : Parell de la càrrega  $(N \cdot m \cdot s)$
- $J$  : Moment d'inèrcia de la càrrega  $(N \cdot m \cdot s^2)/(\text{rad})$
- $\omega$  : Velocitat angular que adquireix l'eix del motor  $(\text{rad/s})$
- $T_d$  : Parell de pertorbació degut a canvis en la càrrega  $(N \cdot m \cdot s)$
- $L$  : Inductància del bobinat del motor (H)
- $R$  : Resistència del bobinat  $(\Omega)$
- $K_m$  : Constant del motor  $(N \cdot m)/(A)$
- $b$  : Constant de fregament  $(Kg)/(m/s)$

La relació entre la velocitat angular i l'angle es recorda que és  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ .

1. Determineu la funció de transferència  $G_A(s) = \frac{T_m(s)}{V(s)}$  que relaciona la tensió  $V(s)$  aplicada al motor amb el parell  $T_m(s)$  produït pel mateix.
2. Trobeu la funció de transferència  $G_B(s) = \frac{\theta(s)}{T_L(s)}$  que relaciona l'angle  $\theta(s)$  que girarà el motor respecte al parell  $T_L(s)$  de la càrrega.

Suposeu ara que es vol efectuar el control de posició del motor amb un controlador proporcional  $G_c(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = K_p$ , on  $E(s)$  és la diferència entre l'angle desitjat  $\theta_s(s)$  i la

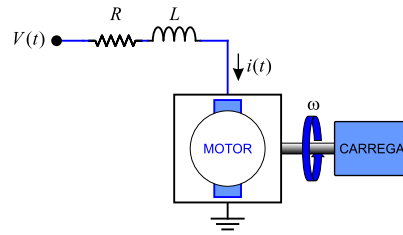


Figura 2-13

mesura de l'angle  $\theta_m(s)$ . La mesura de l'angle es pren amb un sensor que té una funció de transferència  $G_D(s) = \frac{\theta_m(s)}{\theta(s)} = 1$ .

Completeu el diagrama de blocs que es dona a la Figura 2-14, indicant clarament quina és la variable d'entrada i sortida del sistema, la variable que hi ha a l'entrada i sortida de cada bloc, així com la funció de transferència que ha d'haver-hi en cada un dels blocs proporcionats per a que l'esquema proposat sigui vàlid. També cal posar els signes necessaris als comparadors.

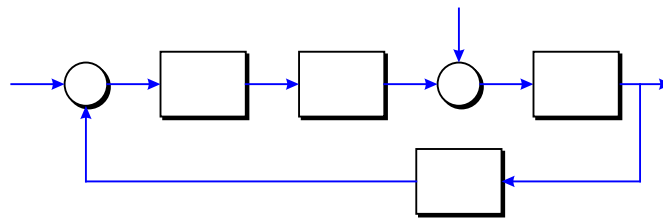


Figura 2-14

**Problema 27** En el procés de laminat de l'acer, s'actua sobre uns rodets de manera que es dona el gruix  $y(t)$  desitjat a la làmina d'acer. Un possible esquema és el donat a la Figura 2-15.

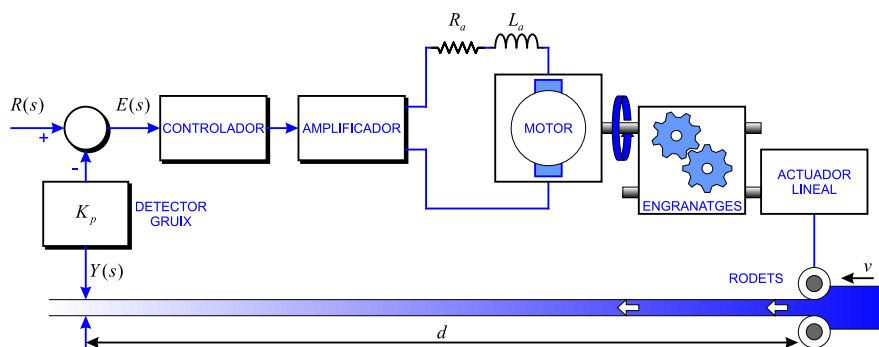


Figura 2-15

La làmina d'acer travessa els rodets a una velocitat constant de  $v$  m/s. La distància entre els rodets i el sensor que mesura el gruix de la làmina d'acer obtingut és de  $d$  metres. El



desplaçament angular del motor  $\theta_m(t)$  es converteix en desplaçament lineal  $y(t)$  mitjançant una combinació d'engranatges i un actuador lineal amb una relació de  $y(t) = n \cdot \theta_m(t)$  ( $n$  ve donada en m/rad). La inèrcia equivalent de la càrrega que es reflexa a l'eix del motor és  $J_L$  i el fregament d'aquesta és  $B_L = 0$ .

1. Dibuixeu un diagrama de blocs per al sistema.
2. Obteniu la funció de transferència de la trajectòria directa  $\frac{Y(S)}{E(S)}$  i la del sistema en llaç tancat  $\frac{Y(S)}{R(s)}$ .

**Problema 28** Es disposa d'una càrrega connectada a un motor de contínua de la forma mostrada a la Figura 2-16. La idea és fer el control de posició i velocitat angular de la càrrega. El motor fa rodar uns engranatges que provoquen que el bis vagi fent desplaçar la càrrega a mesura que aquest va rodant. La velocitat del motor és mesurada pel taquímetre, mentre que la posició es mesura mitjançant un potenciòmetre multivolta que va donant una tensió proporcional al número de voltes que fa el bis, i per tant proporcional a la posició.

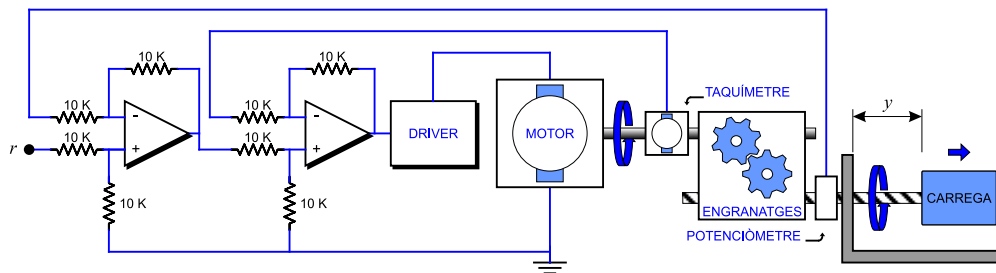


Figura 2-16

Els elements que componen el circuit tenen les característiques següents:

Driver:	guany constant de $K_d$
Motor:	caracteritzat per $R_a, L_a, K_i, K_b, J_m, b_m$
Taquímetre:	dóna 60 volts a 1000 rpm
Engranatges:	roda superior amb $N_1$ dents. Roda inferior amb $N_2$ dents
Bisanfí:	cada 10 voltes, la càrrega es desplaça 1 cm lineal
Potenciòmetre:	proporciona 0 V quan la càrrega està a 0 cm i 10 V quan està a 50 cm
La inèrcia equivalent de la càrrega que es reflexa a l'eix del motor és $J_L$ i $B_L = 0$	

Amb aquestes dades:

1. Obteniu un diagrama de blocs equivalent del sistema.
2. Trobeu la funció de transferència global  $\frac{Y(S)}{R(s)}$ .

**Problema 29** Donats els circuits de la Figura 2-17, determineu la funció de transferència  $H(s) = \frac{V_0}{V_i}$  per a cada un d'ells. Obteniu-ne la resposta impulsional.

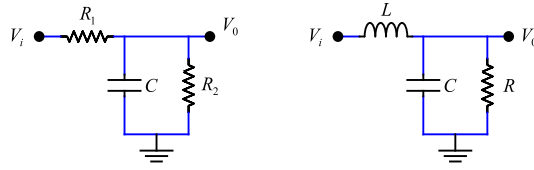


Figura 2-17

**Problema 30** Obteniu la funció de transferència  $H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)}$  dels circuits de la Figura 2-18 amb els valors següents :

$$\begin{array}{lll} R_E = 4.14 \text{ K}\Omega & R_1 = 1.8 \text{ K}\Omega & C_E = 1 \text{ }\mu\text{F} \\ R_r = 62.8 \text{ K}\Omega & R_1 = 6.8 \text{ K}\Omega & C_r = C_1 = C_2 = 10 \text{ nF} \end{array}$$

És aconsellable treballar amb  $R_E$ ,  $C_E$ , ... per a obtenir-la i després substituir els valors corresponents.

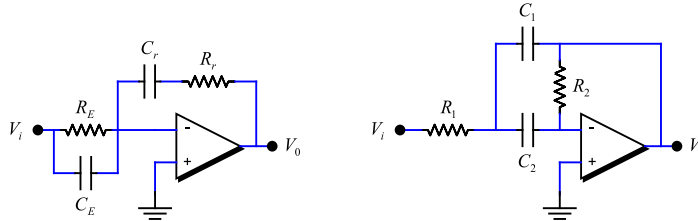


Figura 2-18

**Problema 31** Es vol analitzar el circuit de la Figura 2-19:

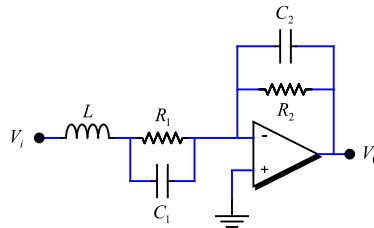


Figura 2-19

Aprofitant l'estructura d'amplificador inversor que té aquest esquema:

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

1. Determineu la funció de transferència del circuit  $H(s)$ . De quin ordre és el sistema?

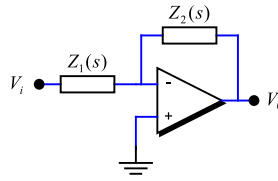


Figura 2-20

2. Amb els valors dels components que segueixen,  $L = 280 \text{ mH}$ ,  $R_1 = 2 \text{ K}\Omega$ ,  $C_1 = 100 \text{ nF}$ ,  $R_2 = 25 \text{ K}\Omega$ ,  $C_2 = 10 \text{ nF}$ , determineu el valor dels pols i zeros del sistema.

**Problema 32** Es disposa del circuit realimentat de la Figura 2-21.

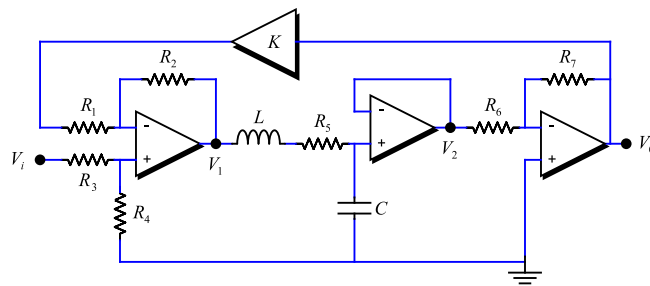


Figura 2-21

1. Determineu la funció de transferència  $H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)}$  del conjunt en funció de la constant de realimentació  $K$ .
2. Si es pren  $K = 499$ , quan valen els pols del sistema realimentat? És estable aquest sistema?
3. Repetiu l'apartat anterior per  $K = 1875$ .
4. Determineu per a quin valor de  $K$  el sistema es torna marginalment inestable.

## 2.3 Representació en espai d'estats

**Problema 33** Expressar el conjunt d'equacions diferencials següent en la forma matricial:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + 2x_2(t)$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_2(t)}{dt} &= -2x_2(t) + 3x_3(t) + u_1(t) \\ \frac{dx_1(t)}{dt} &= -x_1(t) - 3x_2(t) - x_3(t) + u_2(t)\end{aligned}$$

**Problema 34** Donat el sistema mecànic de la Figura 2-22 i definint les variables d'estat com:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t)\end{aligned}$$

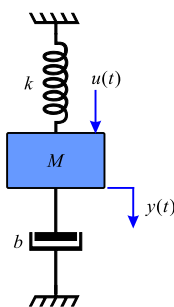


Figura 2-22

1. Trobeu la representació en espai d'estats del sistema.
2. Trobeu la funció de transferència a partir de l'equació d'estat.

**Problema 35** Donat un pèndol invertit com el de la Figura 2-23:

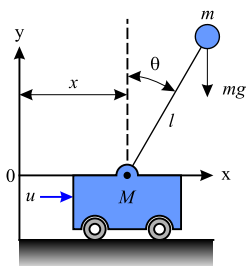


Figura 2-23

1. Trobeu les equacions diferencials que descriuen la dinàmica del sistema.
2. Linealitzant per angles petits ( $\sin \theta \simeq \theta$ ;  $\cos \theta \simeq 1$ ) trobeu la representació en espai d'estats (Agafem  $x_1 = \theta$ ;  $x_2 = \dot{\theta}$ ;  $x_3 = x$ ;  $x_4 = \dot{x}$ ).

**Problema 36** Donada la descripció en espai d'estats següent:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Quina és l'equació diferencial que relaciona la sortida amb l'entrada? i la funció de transferència?

**Problema 37** El sistema següent:

$$S : \begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

és un model d'espai d'estats de la funció de transferència:

$$g(s) = \frac{s-1}{s^2}$$

Comproveu que els zeros de  $S$  venen donats pels zeros de  $g(s)$ .

**Problema 38** Comproveu que el sistema següent és degenerat.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

Intenteu trobar un significat físic a aquest fet.

**Problema 39** Trobeu els zeros i pols del sistema següent:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

**Problema 40** Trobeu els zeros i pols del sistema següent:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$



## 3. DOMINI TEMPORAL

---

### 3.1 Estabilitat

**Problema 41** Sense utilitzar el criteri de Routh-Hurwitz, determineu si els sistemes següents són asimptòticament estables, marginalment estables o inestables. En cada cas es proporciona la funció de transferència del sistema enllaç tancat.

$$\begin{array}{ll} 1) \quad M(s) = \frac{10(s+2)}{s^3+3s^2+5s} & 4) \quad M(s) = \frac{100(s-1)}{(s+5)(s^2+2s+2)} \\ 2) \quad M(s) = \frac{s-1}{(s+5)(s^2+2)} & 5) \quad M(s) = \frac{100}{s^3-2s^2+3s+10} \\ 3) \quad M(s) = \frac{K}{s^3+5s+5} & 6) \quad M(s) = \frac{10(s+12.5)}{s^4+3s^3+50s^2+s+10^6} \end{array}$$

**Problema 42** Utilitzant el criteri de Routh-Hurwitz, determineu l'estabilitat del sistema enllaç tancat que tenen les equacions característiques següents. Trobeu el nombre d'arrels de cada equació que estan al semiplà dret del pla  $s$  i a l'eix  $j\omega$ .

$$\begin{array}{ll} 1) \quad s^3+25s^2+10s+450=0 & 4) \quad 2s^4+10s^3+5.5s^2+5.5s+10=0 \\ 2) \quad s^3+25s^2+10s+50=0 & 5) \quad s^6+2s^5+8s^4+15s^3+20s^2+16s+16=0 \\ 3) \quad s^3+25s^2+250s+10=0 & 6) \quad s^4+2s^3+10s^2+20s+5=0 \end{array}$$

**Problema 43** Per a cada equació característica dels sistemes de control realimentat proporcionats, determineu el límit  $K$  per a que el sistema sigui asimptòticament estable. Trobeu el valor de  $K$  per a que el sistema sigui marginalment estable i la freqüència d'oscil·lació sostinguda si és aplicable.

$$\begin{array}{ll} 1) \quad s^4+25s^3+15s^2+20s+K=0 & 4) \quad s^3+20s^2+5s+10K=0 \\ 2) \quad s^4+Ks^3+2s^2+(k+1)s+10=0 & 5) \quad s^4+Ks^3+5s^2+10s+10K=0 \\ 3) \quad s^3+(K+2)s^2+2Ks+10=0 & 6) \quad s^4+125s^3+s^2+5s+K=0 \end{array}$$

**Problema 44** Donada la funció de transferència de la trajectòria directe de sistemes de control de realimentació unitària, apliqueu el criteri de Routh-Hurwitz per determinar l'estabilitat del sistema enllaç tancat com a funció de  $K$ . Determineu el valor de  $K$

que provocarà oscil·lacions sostingudes d'amplitud constant al sistema. Determineu també la freqüència d'oscil·lació.

$$\begin{aligned}
 1) \quad G(s) &= \frac{K(s+4)(s+20)}{s^3(s+100)(s+500)} & 3) \quad G(s) &= \frac{K}{s(s+10)(s+20)} \\
 2) \quad G(s) &= \frac{K(s+10)(s+20)}{s^2(s+2)} & 4) \quad G(s) &= \frac{K(s+1)}{s^3+2s^2+3s+1}
 \end{aligned}$$

**Problema 45** La planta del sistema de la Figura 3-1 és inestable. Vol dir això que el sistema en laç tancat és inestable? Raonar la resposta.

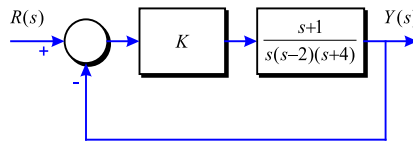


Figura 3-1

**Problema 46** Considerant el sistema de la Figura 3-2, calculeu la funció de transferència  $M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$  en laç tancat i discutiu les implicacions respecte l'estabilitat si:

1. Els paràmetres  $k$  i  $g$  són exactament igual a 1.
2. La cancel·lació és imperfecta amb  $k = 1$  però  $g = 1.01$ .

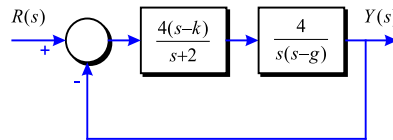


Figura 3-2

**Problema 47** La funció de transferència en laç obert d'un sistema de control realimentat d'un sol laç ve donada per:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+5)}{s(s+2)(1+Ts)}$$

Els paràmetres  $K$  i  $T$  poden ser representats en el pla.  $K$  com l'eix horitzontal i  $T$  com l'eix vertical. Determineu les regions en el pla de paràmetres de  $T$  contra  $K$  en el qual el sistema en laç tancat es asimptòticament estable i inestable. Indiqueu el límit en el que el sistema és marginalment estable.

**Problema 48** Donat el diagrama de blocs de la Figura 3-3, construïu el pla  $K_d$  versus  $K_p$  ( $K_p$  a l'eix vertical) i mostrar les regions següents:



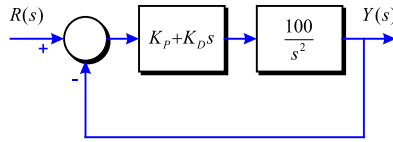


Figura 3-3

1. Regions estables i inestables.
2. Trajectòria d'esmoreïment crític ( $\zeta = 1$ ).
3. Regió  $\zeta > 1$ .
4. Regió  $\zeta < 1$ .
5. Trajectòria de constant d'error d'acceleració  $K_a = 1000 \text{ s}^{-2}$ .
6. Trajectòria de  $\omega_n = 50 \text{ rad/s}$ .
7. Trajectòria on el sistema ja no sigui controlable o observable (Ajuda: busqueu cancel·lacions de pols i zeros).

**Problema 49** A la Figura 3-4 es mostra el diagrama de blocs d'un sistema de control:

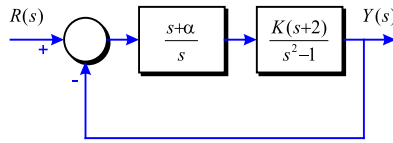


Figura 3-4

Trobeu la regió en el pla  $K$  contra  $\alpha$  perquè el sistema sigui asimptòticament estable. (La  $K$  ha de ser l'eix vertical i  $\alpha$  l'eix horitzontal).

$$\frac{Y(s)}{R(s)}$$

**Problema 50** A partir del model d'un sistema de control com el descrit a la Figura 3-5, on:

$$G(s) = \frac{6}{s(s+a)(s+4)}$$

Es demana:

1. Dibuixeu en el pla  $a - K$  la regió d'estabilitat.
2. Per  $a = 2$ , quins són els valors de  $K$  que fan el sistema estable?
3. Pel valor de  $K$  límit obtingut en l'apartat 2, determineu la freqüència d'oscil·lació sostinguda.

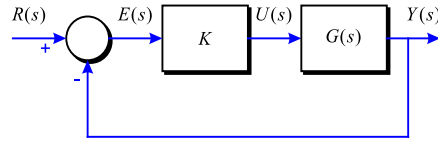


Figura 3-5

4. Dibuixeu la situació dels pols sobre el pla  $s$  en considerar la freqüència d'oscil·lació sostinguda, indicant els seus valors.

**Problema 51** El criteri convencional de Routh-Hurwitz ens dona només informació de la localització dels zeros d'un polinomi  $F(s)$ , respecte als semiplans esquerre i dret del pla  $s$ . Visualitzeu una transformació lineal  $s = f(p, \alpha)$  on  $p$  és una variable complexa, perquè el criteri de Routh-Hurwitz es pugui aplicar per determinar si  $F(s)$  té zeros a la dreta de la línia  $s = -\alpha$ , on  $\alpha$  és un número real positiu. Apliqueu la transformació a les equacions característiques següents per determinar quantes arrels són a la dreta de la línia  $s = -1$  en el pla  $s$ .

- |                                 |                                  |
|---------------------------------|----------------------------------|
| 1) $F(s) = s^2 + 5s + 3$        | 3) $F(s) = s^3 + 4s^2 + 3s + 10$ |
| 2) $F(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$ | 4) $F(s) = s^3 + 4s^2 + 4s + 4$  |

## 3.2 Error estacionari

**Problema 52** Determineu el tipus dels sistemes següents dels quals es donen les seves funcions de transferència a continuació:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $G(s) = \frac{K}{(1+s)(1+10s)(1+20s)}$           | 4) $G(s) = \frac{100(s-1)}{s^2(s+5)(s+6)^2}$ |
| 2) $G(s) = \frac{10e^{-0.2s}}{(1+s)(1+10s)(1+20s)}$ | 5) $G(s) = \frac{10(s+1)}{s^3(s^2+5s+5)}$    |
| 3) $G(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+5)(s+6)}$             | 6) $G(s) = \frac{100}{s^3(s+2)^2}$           |

**Problema 53** Determineu les constants d'error a un graó unitari, a la rampa i a la paràbola del sistema següent de control amb realimentació unitària. Les funcions de transferència en

trajectòria directa són:

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad G(s) = \frac{1000}{(1+0.1s)(1+10s)} & 4) \quad G(s) = \frac{100}{s^2(s^2+10s+100)} \\
 2) \quad G(s) = \frac{100}{s(s^2+10s+100)} & 5) \quad G(s) = \frac{1000}{s(s+10)(s+100)} \\
 3) \quad G(s) = \frac{K}{s(1+0.1s)(1+0.5s)} & 6) \quad G(s) = \frac{K(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2+s+1)}
 \end{array}$$

**Problema 54** Per als sistemes de control amb realimentació unitària que es descriuen al problema 53 determineu l'error en estat estable per a una entrada graó unitari, una entrada rampa unitària i una parabòlica  $\frac{t^2}{2} \cdot u_s(t)$ .

**Problema 55** Les funcions de transferència següents es donen per a un sistema de control amb realimentació no unitària d'un sol llaç com el de la Figura 3-6. Trobeu l'error ( $e(t) = r(t) - y(t)$ ) en estat estable degut a una entrada graó unitari, una rampa unitària i una parabòlica  $\frac{t^2}{2} \cdot u_s(t)$ .

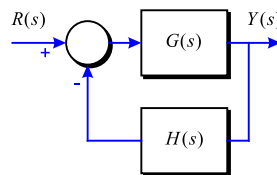


Figura 3-6

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 2} & H(s) = \frac{1}{s + 1} \\
 2) \quad G(s) = \frac{1}{s(s + 5)} & H(s) = 5 \\
 3) \quad G(s) = \frac{1}{s^2(s + 10)} & H(s) = \frac{s + 1}{s + 5} \\
 4) \quad G(s) = \frac{1}{s^2(s + 12)} & H(s) = 5(s + 2)
 \end{array}$$

**Problema 56** Donat el diagrama de blocs del sistema de control representat a la Figura 3-7, on:

$$G(s) = \frac{100}{(1+0.1s)(1+0.5s)}$$

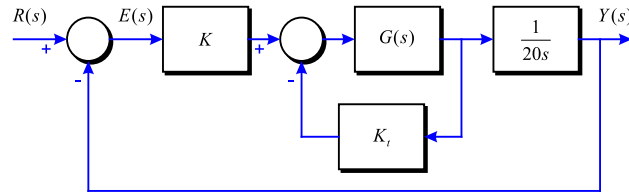


Figura 3-7

1. Trobeu els valors de les constants d'error i el valors dels errors en estat estable (deixant-los en funció de  $K$  i  $K_t$ ) quan s'apliquen les entrades següents:

- (a)  $r(t) = u_s(t)$
- (b)  $r(t) = tu_s(t)$
- (c)  $r(t) = \frac{t^2 u_s(t)}{2}$

Nota: el senyal d'error es defineix com  $e(t) = \mathcal{L}^{-1}[E(s)]$ .

2. Quines restriccions sobre  $K$  i  $K_t$  s'han d'imposar per tal que les respostes siguin vàlides? (feu l'estudi des del punt de vista de l'estabilitat). A partir d'aquestes restriccions digueu quin és el mínim error en estat estable que pot obtenir-se a partir d'una entrada rampa.

**Problema 57** A la Figura 3-8 es mostra el diagrama de blocs d'un sistema de control realimentat. El senyal d'error es defineix com  $e(t) = \mathcal{L}^{-1}[E(s)]$ .

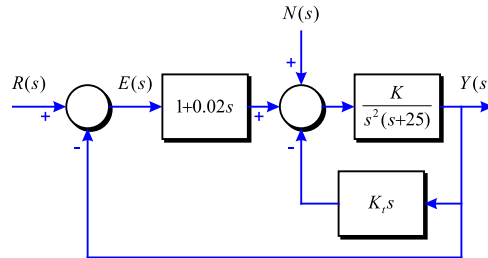


Figura 3-8

1. Trobeu l'error en estat estable del sistema en termes de  $K$  i  $K_t$ , quan l'entrada és una funció rampa unitària i  $n(t) = 0$ . Doneu les condicions dels valors de  $K$  i  $K_t$  perquè la resposta sigui vàlida.
2. Trobeu el valor en estat estable per a  $n(t)$  graó unitari suposant  $r(t) = 0$ .

**Problema 58** A la Figura 3-9 es mostra el diagrama de blocs d'un sistema de control lineal, on  $r(t)$  és la referència d'entrada i  $n(t)$  és la perturbació.

1. Trobeu el valor en estat estable de  $e(t)$  quan  $n(t) = 0$  i  $r(t) = t \cdot u_s(t)$ . Trobeu les condicions als valors de  $\alpha$  i  $K$  perquè la solució sigui vàlida.

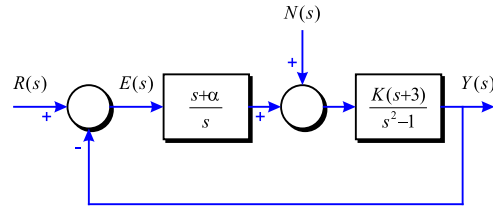


Figura 3-9

2. Trobeu l'error estacionari per  $n(t)$  graó unitari suposant  $r(t) = 0$ .

**Problema 59** Donat el sistema de la Figura 3-10 trobeu, si existeix, el valor en règim permanent de l'error entrada-sortida ( $r(t) - y(t)$ ) per  $K = 0.1$  i  $K = 20$  quan:

1.  $r(t)$  és un graó unitari.
2.  $r(t)$  és una rampa unitària.
3.  $z(t)$  és un graó unitari.
4.  $r(t)$  és un graó unitari i  $z(t)$  un graó d'amplada 2.

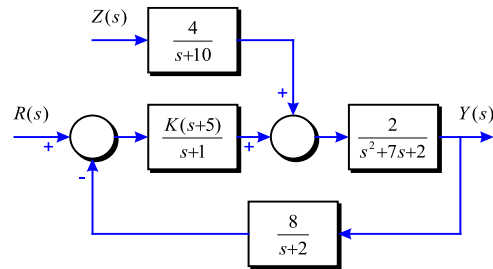


Figura 3-10

**Problema 60** A partir del diagrama de blocs d'un sistema de control realimentat com el de la Figura 3-11:

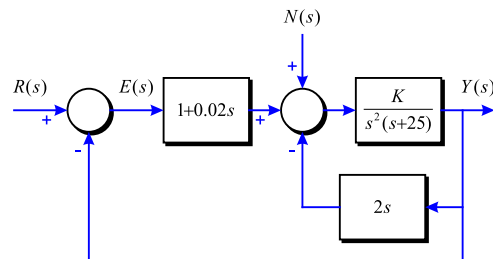


Figura 3-11

1. Trobeu l'error en estat estable del sistema, quan  $r(t)$  és una funció rampa unitària i  $n(t) = 0$ .
2. Trobeu el valor en estat estable de  $y(t)$  quan  $n(t)$  és una funció graó unitari i  $r(t) = 0$ .

**Problema 61** Pel sistema de la Figura 3-12, obteniu en funció de  $K$  el valor del senyal d'error  $e(t)$  en règim permanent quan l'entrada és un graó d'amplada 2 y la pertorbació  $Z$  és un graó d'amplada 1 i retardat 1 segon.

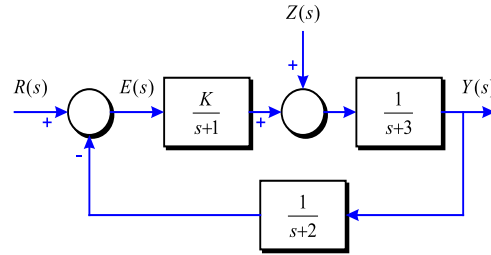


Figura 3-12

**Problema 62** Donat el sistema representat per la Figura 3-13:

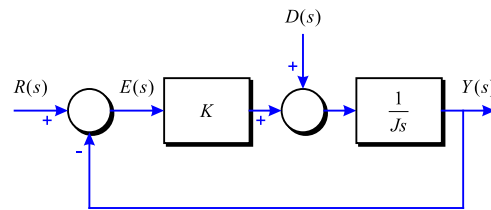


Figura 3-13

1. Trobeu l'error estacionari per una pertorbació graó unitari. (Suposeu que l'entrada de referència és igual a zero).
2. Substituint  $K$  per  $G_c(s)$ , trobeu el tipus de controlador estable que anul·larà aquest error.

**Problema 63** Donat el sistema de control de la Figura 3-14 amb:

$$G_1(s) = \frac{K}{s+9} \quad \text{i} \quad G_2(s) = \frac{1}{(0.1s+1)s}$$

1. Considerant les pertorbacions  $D(s) = 0$ ,
  - (a) Determineu l'expressió de l'error  $E(s)$  en funció de la consigna  $R(s)$  i de  $K$ .
  - (b) Quin és el valor de  $K$  que fa que l'error estacionari del sistema a una entrada rampa de pendent 0.1 sigui del 5%?

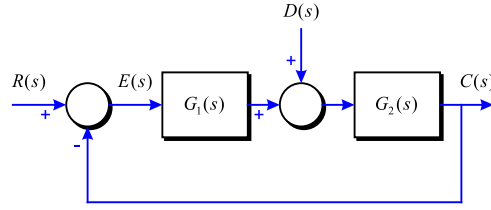


Figura 3-14

2. Suposant ara que  $R(s) = 0$ ,
  - (a) Determineu l'expressió de l'error  $E(s)$  en funció de la pertorbació  $D(s)$  i de  $K$ . Si es pren el valor de  $K$  calculat a l'apartat 1b, quant val aquest error si la pertorbació és un graó unitari?
3. Considerant ara tant  $R(s) \neq 0$  com  $D(s) \neq 0$ ,
  - (a) Determineu l'expressió que tindrà l'error  $E(s)$  en funció de  $R(s)$  i de  $D(s)$ . Quant val l'error estacionari quan la consigna és una rampa de pendent 0.1 i la pertorbació un graó unitari?

**Problema 64** El diagrama de la Figura 3-15 mostra el sistema de control d'un motor DC.  $N(s)$  és el parell de fricció a l'eix del motor i  $G(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+1)(s+2)}$ .

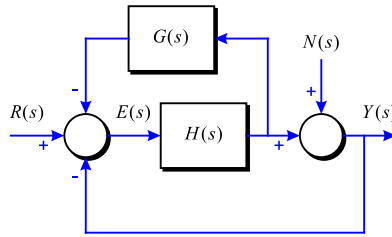


Figura 3-15

1. Trobeu la funció de transferència  $H(s)$  per a que la sortida  $Y(s)$  no sigui afectada pel parell de pertorbació  $N(s)$ :

$$\left. \frac{Y(s)}{N(s)} \right|_{R=0}$$

2. Amb la  $H(s)$  determinada a l'apartat 1, trobeu el valor de  $K$  per a que el valor en estat estable de  $e(t)$  sigui igual a 0.1 quan l'entrada és una funció rampa unitària,  $r(t) = tu_s(t)$ ,  $R(s) = 1/s^2$ , i  $N(s) = 0$ . Apliqueu el teorema del valor final.

$$\left. \frac{E(s)}{R(s)} \right|_{N=0}$$

**Problema 65** Un sistema realimentat amb realimentació negativa unitària té la funció de transferència de la planta següent:

$$G(s) = \frac{2(s+8)}{s(s+4)}$$

1. Determineu la funció de transferència enllaç tancat.
2. Trobeu la resposta temporal  $y(t)$  per una entrada graó  $r(t) = A$  per  $t > 0$ .
3. Utilitzant el teorema del valor final, determineu el valor en estat estacionari de  $y(t)$ .

**Problema 66** A la Figura 3-16, es mostra el diagrama de blocs d'un sistema de control lineal.

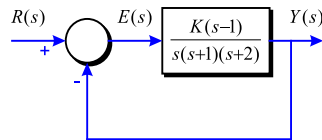


Figura 3-16

Mitjançant prova error, trobeu el valor de  $K$  per a que l'equació característica tingui dues arrels reals iguals i el sistema sigui estable.

**Problema 67** El sistema de la Figura 3-17 descriu una part del sistema simplificat de control de vol d'un airbus.

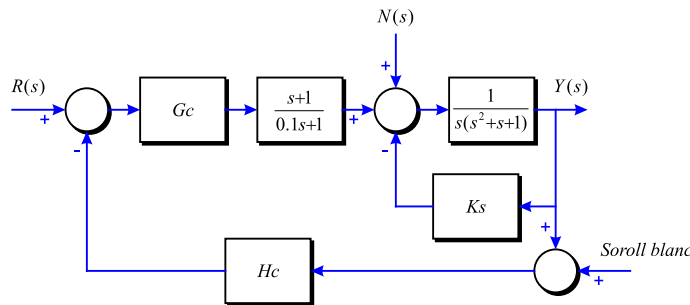


Figura 3-17

1. Com han de ser  $G_c$  i  $H_c$  per que l'avió respongui bé a una entrada rampa?
2. Què significa la realimentació  $Ks$ ?
3. Trobeu el valor de  $K$  que permet al sistema rebutjar millor les perturbacions tipus rampa.



**Problema 68** Es sap que un motor té una funció de transferència:

$$G(s) = \frac{A}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

amb  $\tau_1 = 1/60$ ,  $\tau_2 = 1/600$  i  $A = 10$ . Es proposa controlar aquest motor en llaç obert i en llaç tancat tal i com es mostra a la Figura 3-18, on  $D(s)$  és la pertorbació deguda a la càrrega i  $B = 50$ .

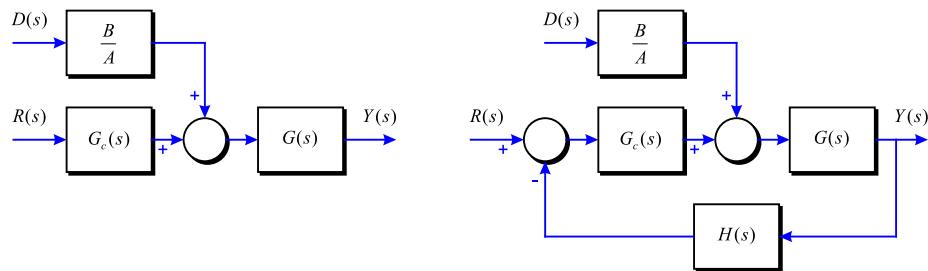


Figura 3-18

1. Considerant el controlador  $G_c(s) = K$ , determineu el valor de  $K$  per al control en llaç obert per a tenir un error de posició nul prenent  $D(s) = 0$ .
2. Amb el valor de  $K$  trobat, calculeu l'estat estacionari de la sortida del sistema en llaç obert considerant ara que  $D(s) = 1/s$ .
3. Determineu el valor del controlador  $K$  per a que el sistema en llaç tancat presenti un efecte de la pertorbació a la sortida 100 vegades menor que l'obtingut en llaç obert. A quin valor tendeix la sortida del sistema amb aquest valor de  $K$  si  $r(t) = 100u(t)$ ?
4. Calculeu la sensibilitat del guany del sistema en llaç obert i la del sistema en llaç tancat respecte a variacions en el paràmetre  $A$ . Compareu els resultats.

**Problema 69** Considereu el sistema donat a la Figura 3-19 on la dinàmica del sensor és pot prendre com  $H(s) = 1$ .

1. Quan val l'error estacionari per a una consigna  $R(s) = \frac{A}{s}$ ?
2. Quina valor hauria de tenir  $K$  per a tenir un error estacionari del 1%?
3. Determineu l'expressió de la sensibilitat del sistema respecte a variacions en el paràmetre  $K$ .
4. Quan val la sensibilitat del guany del sistema pel valor de  $K$  trobat al segon apartat?
5. Representeu la sensibilitat del sistema  $S_K^M$  en funció de la freqüència i comenteu el gràfic obtingut.

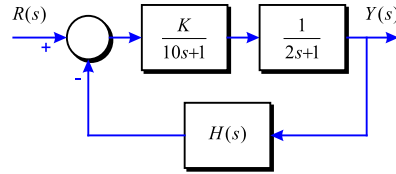


Figura 3-19

### 3.3 Resposta transitòria

**Problema 70** Determineu la resposta impulsional del sistema donat:

$$M(s) = \frac{6(s+3)}{(s+8)(s^2+4s+8)}$$

**Problema 71** Dibuixeu la regió del pla  $s$  en la que han d'estar dos pols complexos conjugats per a complir cadascuna de les especificacions següents:

- 1)  $\zeta \geq 0.707$        $\omega_n \geq 2 \text{ rad/s}$       esmorteïment positiu
- 2)  $0 \leq \zeta \leq 0.707$        $\omega_n \leq 2 \text{ rad/s}$       esmorteïment positiu
- 3)  $\zeta \leq 0.5$        $1 \leq \omega_n \leq 5 \text{ rad/s}$       esmorteïment positiu
- 4)  $0.5 \leq \zeta \leq 0.707$        $\omega_n \leq 5 \text{ rad/s}$       esmorteïment positiu i negatiu

**Problema 72** Donat el sistema de la Figura 3-20.

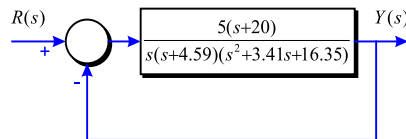


Figura 3-20

1. Trobeu analíticament  $y(t)$  per a una entrada graó unitari.
2. Dibuixeu la resposta aproximada.

Ajuda:  $s^4 + 8s^3 + 32s^2 + 80s + 100 = (s^2 + 2s + 10)(s^2 + 6s + 10)$

**Problema 73** Donat un sistema amb la funció de transferència següent:

$$G(s) = \frac{0.5}{(s^2 + a)(s + 0.5)}$$

representeu aproximadament la resposta a una entrada graó unitari per  $a = 4$  i  $a = 1$ .

**Problema 74** Donat el sistema amb la funció de transferència següent:

$$G(s) = \frac{5}{(s+c)(s^2+s+4.25)}$$

Representeu aproximadament la resposta per una entrada graó unitari per a  $c = 5$ ;  $c = 1$  i  $c = 0.1$ .

**Problema 75** Pel sistema de control de la Figura 3-21:

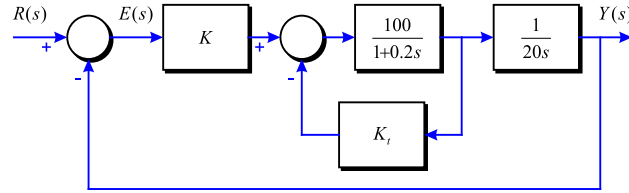


Figura 3-21

1. Trobeu els valors de  $K$  i  $K_t$  per a què el sobrepic màxim de la sortida sigui aproximadament del 4.3% i el temps de pujada  $t_r$  sigui aproximadament de 0.2 s.

Utilitzeu l'equació per relacionar el temps de pujada següent:

$$t_r \cong \frac{1 - 0.4167\zeta + 2.917\zeta^2}{\omega_n} \quad 0 < \zeta < 1$$

2. Trobeu els valors de  $K$  i  $K_t$  per a què el sobrepic màxim de la sortida sigui aproximadament del 20% i el temps de pujada  $t_r$  sigui aproximadament de 0.05 s.
3. Trobeu els valors de  $K$  i  $K_t$  per a què el sobrepic màxim de la sortida sigui aproximadament del 4.3% i el temps de retard  $t_d$  sigui aproximadament de 0.1 s.

Utilitzeu l'equació per relacionar el temps de retard següent:

$$t_d \cong \frac{1.1 + 0.125\zeta + 0.469\zeta^2}{\omega_n} \quad 0 < \zeta < 1$$

4. Trobeu els valors de  $K$  i  $K_t$  per a què el factor d'esmoreïment relatiu del sistema sigui de 0.6 i el temps d'establiment de la resposta a un graó unitari sigui de 0.1 s.

Utilitzeu l'equació per relacionar el temps d'establiment següent:

$$t_s \cong \frac{3.2}{\zeta\omega_n} \quad 0 < \zeta < 0.69$$

5. Trobeu els valors de  $K$  i  $K_t$  per a què el temps d'esmoreïment de la resposta a un graó unitari sigui de 0.05 s i el sobrepic màxim d'un 10%.

6. Trobeu els valors de  $K$  i  $K_t$  per a què el factor d'esmoreïment relatiu del sistema sigui de 0.707 i el temps d'establiment de la resposta a un graó unitari sigui de 0.1 s.

Utilitzeu l'equació per relacionar el temps d'establiment següent:

$$t_s \cong \frac{4.5\zeta}{\omega_n} \quad \zeta > 0.69$$

**Problema 76** Considerant el sistema de la Figura 3-22, si  $K_0 = 1$ , determineu:

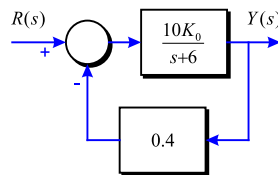


Figura 3-22

1. El guany del sistema  $K$  en contínua i la constant de temps  $\tau$ .
2. El temps d'establiment al 5% per a una entrada graó unitari.
3. La sortida  $y(t)$  per a una entrada graó unitari. Representeu  $y(t)$  gràficament.
4. Repetiu els apartats anteriors per  $K_0 = 6$ .

**Problema 77** En entrar un graó unitari al sistema que segueix:

$$M(s) = \frac{39.39}{s^2 + 16.74s + 171.1}$$

es produeix una sortida  $y(t)$ . Trobeu les característiques de la resposta  $y(t)$  següents:

1. El sobrepic  $SP$ .
2. El temps d'establiment al 2%  $t_{s\pm 2\%}$ .
3. El temps d'establiment al 5%  $t_{s\pm 5\%}$ .
4. El temps de pujada  $t_r$ .
5. El temps de pic  $t_p$ .
6. El valor màxim de la sortida  $y_{m\grave{a}x}$ .
7. El valor final d'establiment  $y(\infty)$ .
8. Quins canvis hi hauria si l'entrada fos un graó d'amplitud 3?

**Problema 78** Calculeu el sobrepic  $SP$ , el temps d'establiment al 2%  $t_{s\pm 2\%}$  i el valor final d'establiment  $y(\infty)$  per a la resposta del sistema  $M(s)$  a una entrada graó unitari. Comenteu les aproximacions que es fan i quins efectes poden tenir sobre la resposta real esperada.

$$M(s) = \frac{4 \cdot 10^6}{(s^2 + 2s + 4)(s + 10^3)^2}$$

**Problema 79** Es disposa de 3 sistemes de control de posició com els donats a la Figura 3-23.

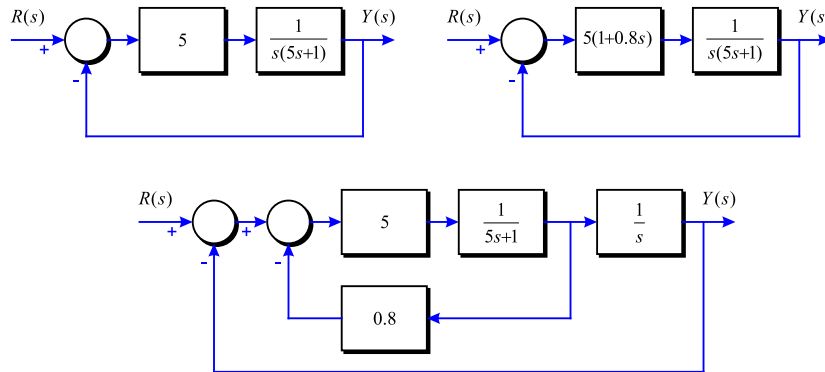


Figura 3-23

Estudieu la resposta al graó dels 3 sistemes i determineu quin sembla millor en quant a sobrepic  $SP$  i velocitat de resposta (puja més ràpid i s'estabilitza abans). Trobeu també l'error estacionari de velocitat  $e_v(\infty)$  per a cada un d'ells. Comenteu les aproximacions que es realitzin en els càlculs.

**Problema 80** Donat el sistema de la Figura 3-24, raoneu quin tipus de controlador serà necessari per a que l'error estacionari sigui nul tant per a un canvi de consigna com per a una pertorbació graó.

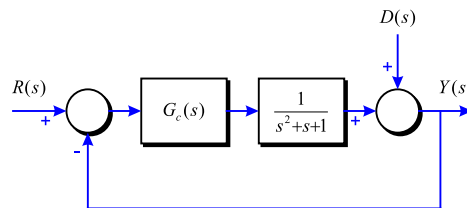


Figura 3-24

**Problema 81** Considereu el sistema de control mostrat a la Figura 3-25. Trobeu les característiques aproximades de la resposta temporal per a una entrada graó.

**Problema 82** La resposta a un graó unitari d'un sistema de control lineal es mostra a la Figura 3-26.

Trobeu la funció de transferència d'un sistema prototipus de segon ordre per modelar el sistema.

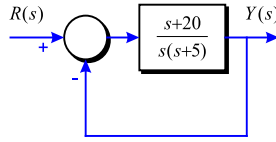


Figura 3-25

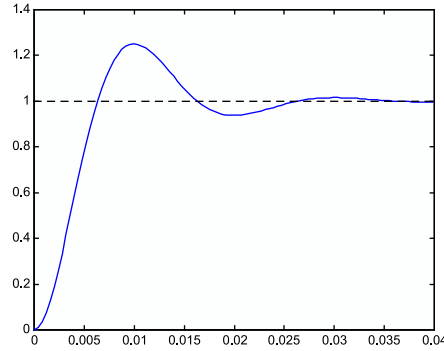


Figura 3-26

**Problema 83** Per tal d'identificar un sistema lineal es realitza la prova de la Figura 3-27.

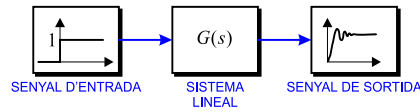


Figura 3-27

El senyal de sortida obtingut com a resposta al graó, és visualitzat en un oscil·loscopi amb memòria i presenta l'aspecte de la Figura 3-28.

Observant aquest senyal, quina funció de transferència podria tenir el sistema incògnita?

**Problema 84** Donat el sistema de la Figura 3-29, trobeu el valor de  $K$  positiu que aconseguix que el sistema realimentat tingui un sobrepic percentual del 10%.

Ajuda: Per tal de trobar les arrels d'un polinomi, aquest es pot descomposar de la forma  $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + a)$ .

**Problema 85** El sistema de la Figura 3-30 és:

$$G(s) = \frac{14}{s^2 + 3s + 7}$$

Trieu el controlador proporcional que faci que el sistema controlat presenti un temps de pic  $t_p = 0.9$  s en resposta a un graó unitari de la pertorbació  $U_p$ .

**Problema 86** Determineu els valors de  $K$  i  $k$  del sistema en llaç tancat de la Figura 3-31 per tal que el sobrepic màxim per a una entrada graó unitari sigui del 25% i el temps de pic sigui menor de 2 s. Supposeu  $J = 1 \text{ Kg}\cdot\text{m}^2$ .

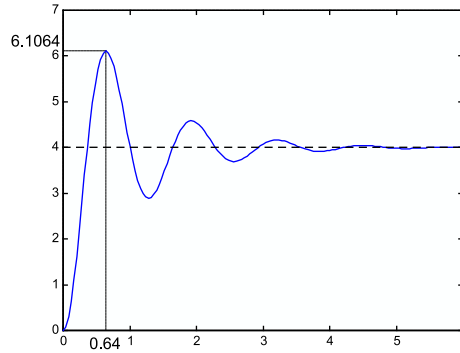


Figura 3-28

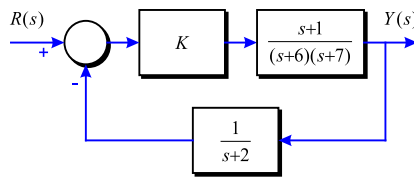


Figura 3-29

**Problema 87** Considereu el sistema de la Figura 3-32. Determineu els valors de  $K$  i  $k$  tals que el sistema total tingui un factor d'esmoreïment  $\zeta = 0.7$  i  $\omega_n = 4$  rad/s.

**Problema 88** La funció de transferència de la trajectòria directa d'un sistema amb realimentació unitària és:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)(s+30)}$$

On  $a$  i  $K$  són constants reals.

Trobeu els valors de  $a$  i  $K$  per a què el factor d'esmoreïment relatiu de les arrels complexes de l'equació característica sigui 0.5 i el temps de pujada de la resposta a un graó unitari sigui aproximadament de 1 s. Utilitzeu l'equació següent com a aproximació al temps de pujada:

$$t_r \cong \frac{1 - 0.4167\zeta + 2.917\zeta^2}{\omega_n} \quad 0 < \zeta < 1$$

Amb els valors de  $a$  i  $K$  trobats, trobeu els errors en estat estable del sistema quan la referència d'entrada sigui un graó unitari i quan sigui una rampa unitària.

Ajuda: Per tal de trobar les arrels d'un polinomi, aquest es pot descomposar de la forma  $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + a)$ .

**Problema 89** La funció de transferència d'un sistema com el de la Figura 3-33 és:

$$G(s) = \frac{39.39}{s^2 + 16.74s + 171.1}$$

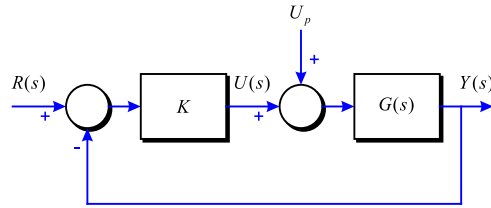


Figura 3-30

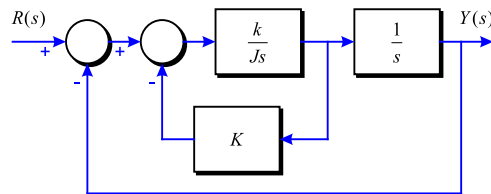


Figura 3-31

1. Calculeu el guany  $K$  que ha de tenir el controlador per tal que la sortida del sistema s'estabilitzi a 0.85 en resposta a una entrada graó unitari.
2. Calculeu el guany  $K$  que ha de tenir el controlador per tal que el temps d'estabilització dins d'una banda del 2% en resposta a un graó unitari sigui de 0.47 s.
3. Calculeu el guany  $K$  que ha de tenir el controlador per tal que la sortida del sistema a una resposta graó unitari tingui un sobrepic del 45%.
4. Si volem que la resposta a un graó unitari sigui críticament esmorteïda, quin guany ha de tenir el controlador que hi posem?

**Problema 90** Donat el sistema de control de la Figura 3-34 amb  $\tau_1 = 0.5$ ,  $\tau_3 = 1$ ,  $\tau_4 = 0.125$ .

1. Determineu el valor límit  $K_{Lim}$  que pot prendre el guany de llaç  $K = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3$  per a que el sistema es mantingui estable, sabent que  $K_1 > 0$ ,  $K_2 > 0$ ,  $K_3 > 0$ .
2. Calculeu el valor de  $K$  de manera que s'aconsegueixi un temps d'establiment  $t_{s\pm 2\%} \leq 4$  s. Amb aquest valor de  $K$ , quin sobrepic  $SP$  es tindrà? Per a fer aquest apartat s'aconsella descomposar el denominador de la funció de transferència global de la forma  $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + a)$ .
3. Calculeu el valor dels pols i dels zeros del sistema global. A l'apartat anterior s'està fent una aproximació. Quina? És una bona aproximació? Doneu l'expressió de la funció de transferència del sistema global prototipus de segon ordre que serviria per a aproximar al sistema original.

**Problema 91** El sistema de control de profunditat d'un submergible és el donat a la Figura 3-35.

Determineu:



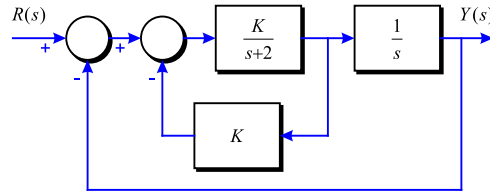


Figura 3-32

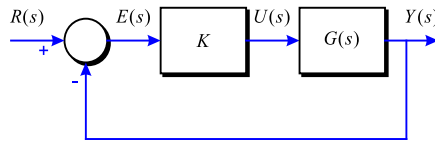


Figura 3-33

1. La funció de transferència en llaç tancat  $M(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$ .
2. Estabilitat del sistema per  $K_1$ .
3. Error en estat estacionari degut a una pertorbació  $D(s)$  graó unitari.
4. Resposta del sistema  $c(t)$  per a una entrada  $r(t)$  graó unitari amb  $K_1 = 4$ .
5. Proposeu una modificació del controlador  $G_c(s)$  per a que es tingui un error nul per una pertorbació graó.

**Problema 92** El sistema de control de profunditat d'un submergible és el donat a la Figura 3-36.

Determineu:

1. La funció de transferència en llaç tancat  $M(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$ .
2. Estabilitat del sistema per  $K_1$  i  $K$ .
3. Error en estat estacionari degut a una pertorbació  $D(s)$  graó unitari.
4. Sensibilitat del guany del sistema  $S_{K_1}^M$  i  $S_K^M$ .
5. Resposta del sistema  $c(t)$  per a una entrada  $r(t)$  graó unitari amb  $K = K_2 = 1$  i  $K_1 = 4$ .
6. Valor de la sensibilitat del guany del sistema  $S_{K_1}^M$  i  $S_K^M$  per als paràmetres calculats a l'apartat 5.

**Problema 93** El sistema de control de velocitat d'un vehicle (amb Ziritione, és clar) és el donat a la Figura 3-37.

1. Trobeu la funció de transferència  $G(s) = \frac{V(s)}{R(s)}$ .

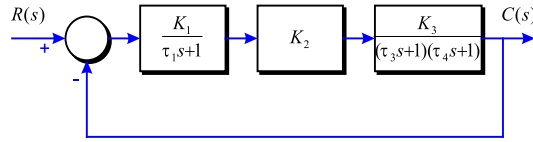


Figura 3-34

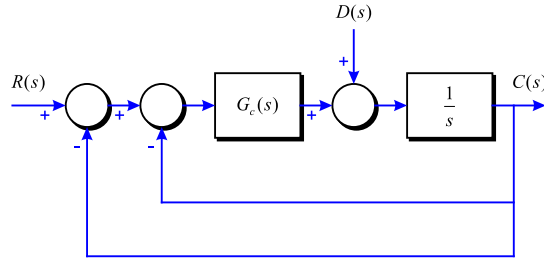


Figura 3-35

2. Éssent  $K_1 > 0$ , quina condició han d'acomplir  $K_2$  i  $K_3$  per assegurar l'estabilitat del sistema?
3. Determineu els valors de  $K_2$  i  $K_3$  per a que el sistema presenti un error de velocitat  $e_v(\infty) \leq 0.1$  (prendre com error  $E(s) = R(s) - V(s)$ ), i un sobrepic  $SP \leq 10\%$  per a una entrada graó unitari. Prendre  $K_1 = 2$ . Comenteu si és que es fa alguna aproximació. Quant val el temps d'establiment  $t_{s \pm 2\%}$ ? Què passarà amb el sobrepic i el temps d'establiment si ara el graó d'entrada és de 5?
4. El guany del sistema serà més sensible a variacions de  $K_1$ ,  $K_2$  o de  $K_3$ ? Per què?

### 3.4 Disseny temporal

**Problema 94** Dissenyeu un controlador  $G_c(s)$  per a que el sistema donat a la Figura 3-38 presenti un error de posició  $e_p(\infty) = 0$ ,  $\zeta = 1$  i  $\omega_n = 4$  rad/s. Comenteu les possibles aproximacions que es facin en els càlculs.

**Problema 95** La funció de transferència del sistema de la Figura 3-39 és:

$$G(s) = \frac{100}{s(1 + 0.1s)}$$

1. Trieu un controlador proporcional (P)  $G_c(s) = K$  tal que el sistema controlat tingui:

Sobrepic: 5% en resposta a un graó  
 Error de velocitat:  $e_v(\infty) \leq 20\%$

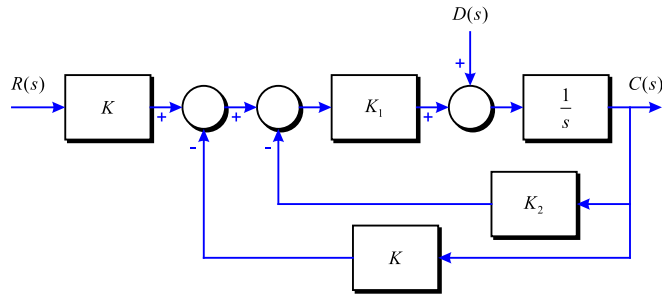


Figura 3-36

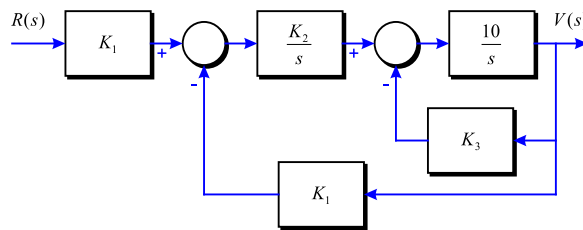


Figura 3-37

2. Trieu un controlador proporcional-derivatiu (PD)  $G_c(s) = K(1 + T_d s)$  que compleixi les especificacions de l'apartat anterior i a més tingui un temps d'establiment  $t_{s\pm 2\%} = 0.57$  s. Suposeu que hi ha dominància dels pols respecte del zero que introdueix el controlador. Comproveu si aquesta dominància existeix.
3. Trieu un controlador proporcional-integral (PI)  $G_c(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$  que compleixi aquestes especificacions:

Sobrepic:	5% en resposta a un graó
Temps d'establiment:	$t_{s\pm 2\%} \leq 4$ s
Error de velocitat:	$e_v(\infty) = 0$

Suposeu que hi ha dos pols dominants. Comproveu si la dominància suposada és certa.

4. Trieu un controlador proporcional-integral-derivatiu (PID)  $G_c(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$  que compleixi aquestes especificacions:

Sobrepic:	5% en resposta a un graó
Temps d'establiment:	$t_{s\pm 2\%} = 0.57$ s
Error de velocitat:	$e_v(\infty) = 0$

Suposeu que hi ha dos pols dominants i el tercer està a -50.

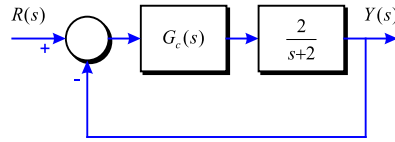


Figura 3-38

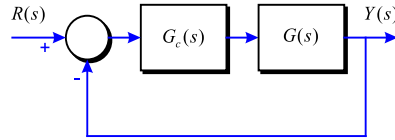


Figura 3-39

**Problema 96** Un sistema de control amb un procés de tipus 0 com:

$$G_p(s) = \frac{100}{s^2 + 10s + 100}$$

i un controlador PI com:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

es mostra a la Figura 3-40.

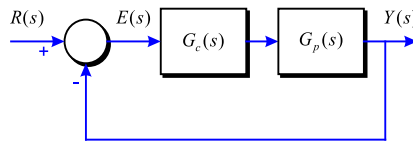


Figura 3-40

1. Trobeu el valor de  $K_i$  tal que la constant d'error rampa  $K_v$  sigui 10.
2. Trobeu el valor de  $K_p$  tal que la magnitud de les parts imaginàries de les arrels complexes de l'equació característica del sistema sigui 15 rad/s. Trobeu les arrels de l'equació característica.

**Problema 97** Un sistema de control amb un procés tipus 0 i un controlador PID es mostra a la Figura 3-40. Amb:

$$G_p(s) = \frac{100}{s^2 + 10s + 100}$$

dissenyeu els paràmetres del controlador de manera que es compleixin les especificacions següents:

Constant d'error rampa:	$K_v = 100$
Temps de pujada:	$t_r < 0.01 \text{ s}$
Sobrepic màxim:	$SP < 2\%$

Dibuixeu la gràfica de la resposta del sistema a l'escaló unitari.

**Problema 98** Un sistema de guiatge té un llaç intern amb la funció de transferència següent:

$$G(s) = \frac{23}{s + 23}$$

Dissenyau un controlador que compleixi les especificacions següents: temps d'establiment a la banda del 2% menor que 1 s i error estacionari per una entrada rampa menor que 0.1. Dibuixeu aproximadament la resposta del sistema.

**Problema 99** Donat el sistema de la Figura 3-41, on:

$$G(s) = \frac{0.0733}{s^2 + 0.1s + 0.0367}$$

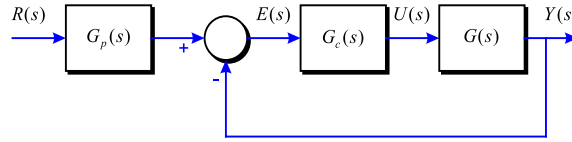


Figura 3-41

Calculeu els paràmetres del controlador  $G_c(s)$  i el prefiltre  $G_p(s)$  que permetrà que es compleixin les especificacions en entrar un graó unitari següents:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= 0 \\ SP &\leq 10\% \\ t_{s \pm 2\%} &\leq 40 \text{ s} \end{aligned}$$

**Problema 100** Considereu el sistema de la Figura 3-42. Suposant que l'entrada de referència  $R(s)$  es manté constant :

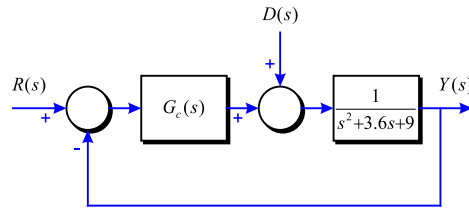


Figura 3-42

1. Dissenyau un controlador tal que una pertorbació graó s'esmorteïxi prou ràpid (temps d'establiment al 2% de 2 ó 3 segons). Escolliu la configuració dels pols en llaç tancat tal que existeixin un parell de pols dominants.

2. Obteniu la resposta per a una entrada pertorbació graó unitari.
3. Obteniu també la resposta per a una entrada de referència graó unitari.

**Problema 101** El telescopi pel rastreig d'estrelles i asteroides en un transbordador espacial pot ser modelat com una massa pura  $M$ . Està suspès mitjançant rodaments magnètics per a que no hi hagi fricció i la seva localització és controlada per actuadors magnètics localitzats a la base de la secció de càrrega. El model dinàmic pel control del moviment en l'eix  $z$  es mostra a la Figura 3-43. Ja que hi ha components elèctrics en el telescopi, cal alimentar el telescopi amb energia elèctrica a través d'un cable. El ressort mostrat s'utilitza per modelar el cable, que efectua una força de ressort sobre la massa. La força produïda pels actuadors magnètics es denota per  $f(t)$ . L'equació de força de moviment en la direcció  $z$  és:

$$f(t) - K_s z(t) = M \frac{d^2 z(t)}{dt^2}$$

on:  $K_s = 1$  lb/pie,  $M = 150$  lb (massa),  $f(t)$  està en lliures i  $z(t)$  es mesura en peus.

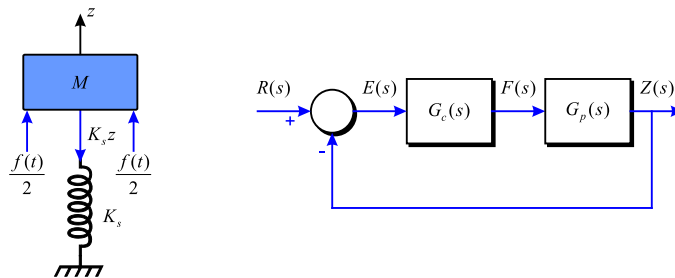


Figura 3-43

1. Mostreu que la resposta natural de la sortida del sistema  $z(t)$  es oscil·latoria sense esmorteïment. Trobeu la freqüència natural no esmorteïda del sistema enllaç obert del transbordador espacial.
2. Dissenyeu el controlador PID:

$$G_c(s) = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s}$$

que es mostra a la Figura 3-43, de tal manera que es satisfacin les especificacions següents:

Constant d'error rampa:  $K_v = 100$

Les arrels complexes de la equació característica corresponen al factor d'esmorteïment relatiu 0.707 i una freqüència natural no esmorteïda de 1 rad/s

Calculeu i dibuixeu la resposta a un graó unitari del sistema dissenyat. Trobeu el sobrepic màxim. Comenteu els resultats de disseny.

3. Dissenyeu el controlador PID de tal manera que es satisfacin les especificacions següents:

$$\begin{aligned} \text{Constant d'error rampa: } & K_v = 100 \\ \text{Sobrepic màxim: } & SP < 5\% \end{aligned}$$

Calculeu i dibuixeu la resposta a un graó unitari del sistema dissenyat. Trobeu les arrels de l'equació característica del sistema dissenyat.

**Problema 102** Donat un sistema com el de la Figura 3-44 amb la funció de transferència següent:

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + a + 10)(s + 2)}$$

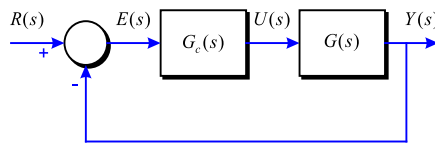


Figura 3-44

1. Prenent  $a = 1$ , apliqueu el mètode de sintonia de Ziegler-Nichols que es cregui més adient per tal d'ajustar els paràmetres d'un controlador PID i poder donar l'expressió de  $G_c(s)$ .
2. Prenent  $a = 0$ , i suposant ara que  $G_c(s)$  és un controlador proporcional  $G_c(s) = K$ , determineu l'estabilitat del sistema en funció del paràmetre  $K$ .

**Problema 103** Donat el sistema:

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 1)(s + 5)}$$

1. Trobeu un controlador PID utilitzant qualsevol dels mètodes de sintonia de Ziegler-Nichols.
2. Determineu quin serà aproximadament el màxim overshoot per a una entrada graó unitari.

Ajuda:  $s^3 + 6s^2 + 5s + 30 = (s + 6)(s^2 + 5)$ .

**Problema 104** Donat un sistema amb la funció de transferència següent:

$$G(s) = \frac{e^{-2s}}{3s + 1}$$

1. Trobeu un controlador PID utilitzant el mètode de sintonia de Ziegler-Nichols en llaç obert.
2. Trobeu un controlador PID utilitzant el mètode de sintonia de Ziegler-Nichols en llaç tancat.

**Problema 105** Considereu el sistema de control de la Figura 3-45.

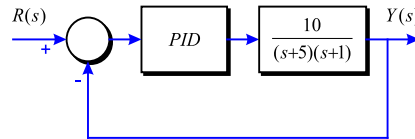


Figura 3-45

Utilitzant el mètode de Ziegler-Nichols, trobeu els valors de  $K_p$ ,  $T_i$  i  $T_d$ . Determineu quin serà aproximadament el màxim overshoot per una entrada graó unitari.

**Problema 106** Determineu el valor de  $K_a K_m$  per a que la resposta del sistema de la Figura 3-46 minimitzi l'índex ITAE amb un temps d'establiment de  $t_s = 0.28$  s. Supposeu que per  $n = 3$ , la resposta normalitzada al graó unitari es pot considerar que s'ha estabilitzat a  $\omega_n t_s \simeq 14$  (Apèndixs finals).

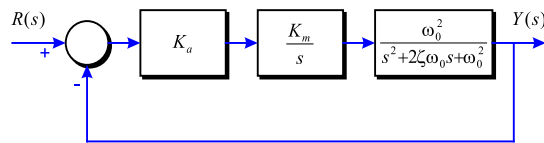


Figura 3-46

Calculeu el sobrepic  $SP$  i el temps d'establiment  $t_s$  esperat. Determineu la posició dels pols del sistema en llaç tancat obtingut i discuteu la validesa del càlcul de  $SP$  i  $t_s$ .

**Problema 107** Considereu el sistema de control de temperatura de la Figura 3-47.

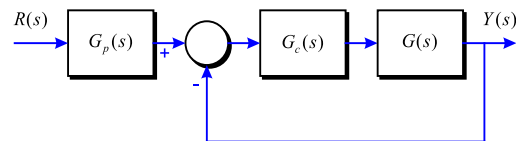


Figura 3-47

Si la funció de transferència del sistema és  $G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$ , obteniu un controlador que optimitzi el criteri ITAE per a una entrada graó amb un temps d'establiment menor que 0.5 s.

**Problema 108** A la Figura 3-48 es veu el diagrama de blocs del braç d'un robot espacial.



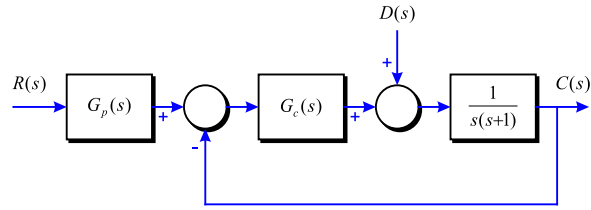


Figura 3-48

1. Si  $G_c(s) = K$ , determineu el guany necessari per obtenir un sobrepic del 4.5% per una entrada graó.
2. Dissenyeu un regulador PD, un PI i un PID que minimitzi el criteri ITAE amb  $\omega_n = 10$ . Determineu el prefiltre requerit en cada cas.
3. Determineu l'efecte d'una pertorbació unitària per a cada disseny, anotant el valor final de  $c(t)$  i el màxim valor de  $c(t)$ .
4. Determineu l'overshoot, temps de pic i temps d'establiment per una entrada graó unitària per cadascun dels dissenys anteriors.
5. La planta està subjecte a variacions degudes a la càrrega. Trobeu la magnitud de la sensibilitat a  $\omega = 5$  per a cada disseny.

$$|S_G^T(j5)| = \frac{|T(j5)|}{|G(j5)|}, \text{ on } T(j5) = \frac{GG_c}{1 + GG_c}$$

6. A partir dels resultats anteriors, seleccioneu el millor controlador.



## 4. LLOC DE LES ARRELS

### 4.1 Construcció del lloc de les arrels

**Problema 109** Representeu el lloc de les arrels dels sistemes següents, en funció de variacions del paràmetre  $K$  de 0 a  $\infty$  i amb realimentació unitària:

$$\begin{array}{ll} 1) \quad G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} & 4) \quad G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)} \\ 2) \quad G(s) = \frac{K(s+0.4)}{s^2(s+3.6)} & 5) \quad G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+3.6)} \\ 3) \quad G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s^2+4s+13)} & 6) \quad G(s) = \frac{s^2+14s+98}{s^2(s+14)} \end{array}$$

**Problema 110** Un sistema té una estructura com la donada a la Figura 4-1.

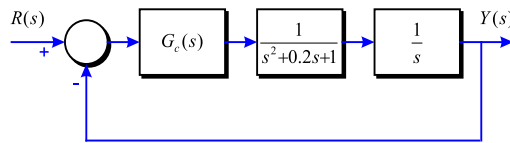


Figura 4-1

1. Si  $G_c(s) = K$ , representeu l'evolució dels pols del sistema enllaç tancat en funció de  $K$ .
2. Determineu per a quin valor de  $K$  el sistema es fa inestable.
3. Per a fer que no es torni inestable, es decideix posar-hi un compensador  $H(s) = \frac{s^2 + 0.18s + 0.81}{(s + 10)^2}$ , tal i com es mostra a la Figura 4-2.

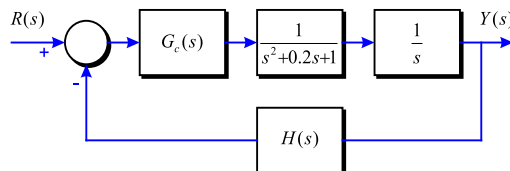


Figura 4-2

Feu un esbós de la trajectòria que seguiran ara els pols del sistema enllaç tancat.

Nota: Se sap que el diagrama del lloc de les arrels presenta un únic break-point a  $s \simeq -3$ .

## 4.2 Disseny en el lloc de les arrels

**Problema 111** Considereu el sistema de la Figura 4-3. És un control PID per a un sistema de segon ordre. Suposant que es manté l'entrada de referència  $R(s)$  constant:

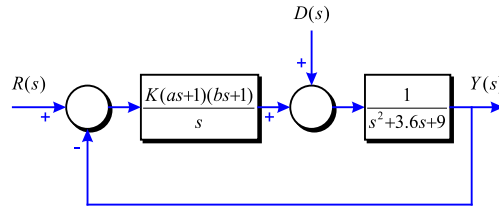


Figura 4-3

1. Dissenyeu un controlador tal que una pertorbació graó s'esmorteïxi prou ràpid (temps d'establiment al 2% de 2 o 3 segons). Escolliu la configuració dels pols en llaç tancat tal que existeixin un parell de pols dominants.
2. Obteniu la resposta per a una entrada pertorbació graó unitari.
3. Obteniu també la resposta per a una entrada de referència graó unitari.

**Problema 112** Donat un sistema en llaç obert  $G(s) = \frac{(s+10)}{s(s+1)(s+10)(s+50)}$ , si s'utilitza en el llaç directe un controlador  $G_c(s) = K$ , i es realimenta amb  $H(s) = 1$  (en el llaç de realimentació), determineu el valor de  $K$  pel qual es tindrà uns pols complexos conjugats amb un esmorteïment de  $\zeta = 0.8$ .

**Problema 113** Representeu el lloc de les arrels del sistema  $G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+9)}$  amb realimentació unitària. Determineu per a quin valor de  $K$  el sistema global  $M(s)$  tindrà tres arrels reals iguals. Quin valor tenen aquestes arrels?

**Problema 114** Un possible sistema de control d'un làser és el que es dona a la Figura 4-4 on  $\tau_1 = 10$  i  $\tau_2 = 5$ .

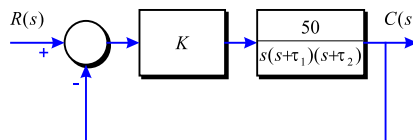


Figura 4-4

1. Representeu de forma aproximada el lloc de les arrels del sistema proposat, fent variar  $K$  de 0 a  $\infty$ . (Zeros, pols, zones sobre l'eix real, asímptotes, angles, punts de ruptura, etc.).  
Dada: El polinomi  $x^3 + 15x^2 + 50x + 750$  té una de les seves arrels a  $x = -15$ .
2. Indiqueu per a quin marge de valors de  $K$  el sistema és estable.
3. Quin valor de  $K$  fa que es tingui uns pols complexos conjugats situats a  $-1.57 \pm 3.19j$ ?
4. Considerant que els pols complexos són dominants, quant val el sobrepic per a aquesta  $K$ ? I el temps d'establiment al 2%? Raoneu si aquests pols són realment dominants.

**Problema 115** Representeu gràficament la variació dels pols del sistema  $M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$  de la Figura 4-5 per a variacions del paràmetre  $a$ . Per a quin valor de  $a$  el sistema presenta un esmorteïment crític? I un sobrepic de  $SP = 5\%$ ? Comenta l'exactitud del càlcul de  $SP$ .

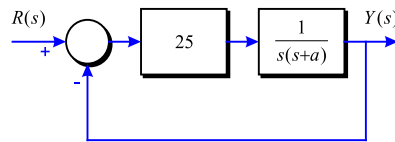


Figura 4-5

**Problema 116** Determineu els valors de  $K_2$  per a que el sistema de la Figura 4-6 presenti un  $SP \leq 5\%$ .

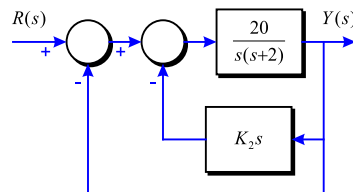


Figura 4-6

**Problema 117** Determineu el valor de  $K$  per a que el sistema de la Figura 4-7 tingui pols complexos conjugats a  $-8 \pm 2.4j$ .

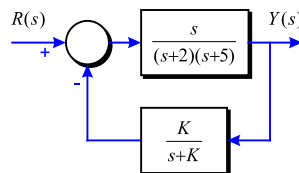


Figura 4-7

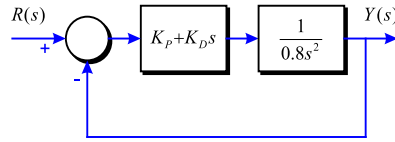


Figura 4-8

**Problema 118** Es disposa del sistema de la Figura 4-8.

Es vol obtenir  $K_p$  i  $K_d$  per a que el sistema enllaç tancat, tingui com a pols  $s_e = -6 \pm 3.84j$ . Per això es proposa seguir el procediment que es dona a continuació:

1. Prenent  $K_d = 0$ , obteniu el lloc de les arrels del sistema respecte a variacions de  $K_p$ .
2. Obteniu l'expressió de la funció de transferència que serà útil per a trobar el lloc de les arrels depenent del paràmetre  $K_d$ . Quina és l'expressió dels pols  $P$  de partida d'aquest diagrama?
3. Obteniu a partir de la condició d'angle del lloc de les arrels de l'apartat 2 on haurien d'estar situats els pols  $P$  per a que el diagrama passés per  $s_e$ . Calculeu després el valor de  $K_p$  que produeix aquests pols de partida  $P$ .
4. Amb el valor de  $K_p$  anterior i la condició de mòdul del lloc de les arrels, calculeu el valor de  $K_d$  necessari per a tenir els pols  $s_e$ .

**Problema 119** Es disposa d'un procés:

$$G(s) = \frac{1}{10^4 (s^2 - 1.1772)}$$

Es realimenta aquest tot posant un controlador  $G_c(s)$  com el de la Figura 4-9.

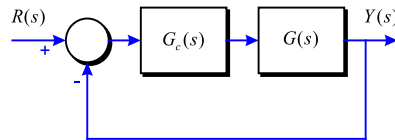


Figura 4-9

1. Representeu el lloc de les arrels d'aquest sistema utilitzant un controlador proporcional  $G_c(s) = K$ . Determineu si es possible el control d'aquest procés amb aquest  $G_c(s)$ .
2. Suposant ara que  $G_c(s) = K(s + z)$  i que es vol un sobrepic de  $SP = 4.3\%$  amb un temps d'establiment de  $t_{s \pm 2\%} = 11.305$  s, determineu el valor de  $K$  i  $z$  per obtenir aquestes especificacions.
3. Amb el valor de  $K$  i  $z$  trobats, serà el sobrepic l'esperat? Per què?
4. Quin serà l'error de posició  $e_p(\infty)$  i el de velocitat  $e_v(\infty)$  del sistema controlat?

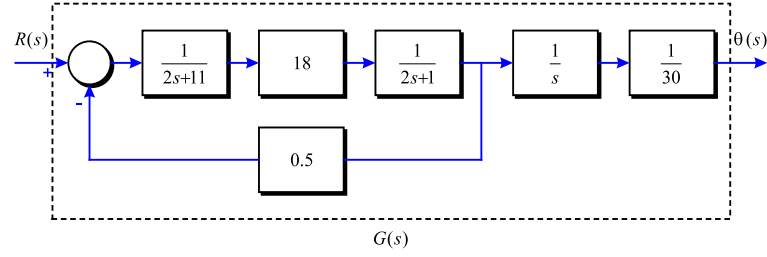


Figura 4-10

**Problema 120** En els processos industrials és bastant normal trobar manipuladors en forma de braç. L'articulació del braç és accionada per un motor de contínua, de manera que el conjunt motor+braç es pot modelar com a la Figura 4-10.

1. Calculeu la funció de transferència del sistema motor+braç  $G(s) = \frac{\theta(s)}{R(s)}$ .

Per a fer que el procés  $G(s)$  segueixi a una consigna graó unitari amb  $SP \leq 5\%$  i  $t_{s \pm 2\%} \leq 4$  s, es proposa utilitzar l'estructura de control de la Figura 4-11.

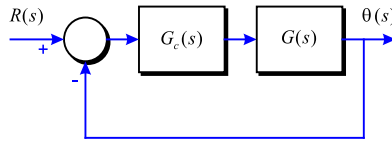


Figura 4-11

1. Demostreu de forma intuïtiva i fent algun esbós, que si  $G_c(s) = K_p$ , no es poden assolir les especificacions proposades, mentre que amb un controlador PD  $G_c(s) = K_p + K_d s$ , sí es pot (no cal calcular  $K_p$  i  $K_d$  de moment).
2. Trobeu la condició que s'ha de complir entre  $K_p$  i  $K_d$  que fa que el sistema enllaç tancat sigui estable. Representeu gràficament la zona d'estabilitat prenent  $K_d$  a l'eix de les abscisses i  $K_p$  a l'eix d'ordenades.
3. Determineu el valor de  $K_p$  i  $K_d$  per tal de que el sistema controlat compleixi amb les especificacions proposades. Representeu el mapa de pols i zeros del sistema realimentat amb aquest controlador i comenteu si s'obtidran les especificacions proposades exactament o bé hi haurà alguna diferència.
4. Quant val l'error estacionari de posició  $e_p(\infty)$ , el de velocitat  $e_v(\infty)$  i el d'acceleració  $e_a(\infty)$  per aquests paràmetres del controlador?

**Problema 121** Donat el sistema de a Figura 4-12 amb  $G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$ :

1. Si es pren  $G_c(s)$  com un PID amb zeros reals, un dels quals es situa a  $Z_1 = 1$ , calculeu els paràmetres  $K_p$ ,  $K_i$  i  $K_d$  del PID per a que el sistema enllaç tancat tingui pols a

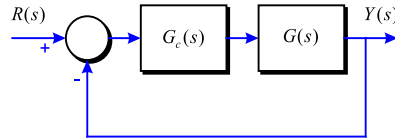


Figura 4-12

$Se = -1 \pm \sqrt{3}j$ . Calculeu el sobrepic  $SP$  i el temps d'establiment esperats, suposant  $Se$  dominants. Comproveu la dominància d'aquests pols.

2. Repetiu el disseny anterior, suposant ara que el PID té un zero real doble. Compareu els resultats amb el PID anterior.

**Problema 122** Un dels processos de llum utilitzats a les pràctiques de laboratori s'ha identificat mitjançant el model dinàmic següent:

$$G(s) = \frac{185.9}{s^2 + 39.936s + 676}$$

Mitjançant el lloc de les arrels, trobeu un controlador tipus PID que faci que el sistema realimentat compleixi les especificacions següents:

$$\begin{aligned} \text{Error de posició:} \quad & e_p(\infty) = 0 \\ \text{Temps d'establiment:} \quad & t_{s \pm 2\%} \leq 0.12 \text{ s.} \left( t_{s \pm 2\%} = \frac{4}{\zeta \omega_n} \right) \\ \text{Sobrepic:} \quad & SP \leq 1\% \quad (\zeta \simeq 0.95) \end{aligned}$$

**Problema 123** Considereu el sistema inestable següent:

$$G(s) = \frac{1}{10000(s^2 - 1.1772)}$$

Mitjançant el lloc de les arrels, trobeu un controlador tipus PID que faci que el sistema realimentat compleixi les especificacions següents:

$$\begin{aligned} \text{Freqüència natural no esmorteïda:} \quad & \omega_n = 0.5 \text{ rad/s.} \\ \text{Esmorteïment:} \quad & \zeta = 0.7 \end{aligned}$$

**Problema 124** Donat el sistema de la Figura 4-13 amb  $G(s) = \frac{100}{s(1 + 0.1s)}$  i utilitzant el mètode del lloc de les arrels:

1. Trieu un controlador proporcional (P)  $G_c(s) = K$  tal que el sistema controlat tingui:

Un sobrepic del 5% en resposta a un graó  
Un error de velocitat  $e_v \leq 20\%$



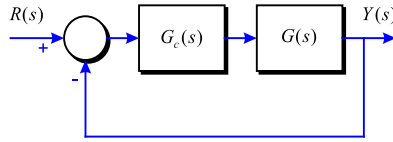


Figura 4-13

2. Trieu un controlador proporcional-derivatiu (PD)  $G_c(s) = K(1 + T_d s)$  que compleixi les especificacions de l'apartat anterior i a més tingui un temps d'establiment  $t_{s\pm 2\%} = 0.57$  s. Supposeu que hi ha dominància dels pols respecte del zero que introdueix el controlador.
3. Trieu un controlador proporcional-integral (PI)  $G_c(s) = K(1 + \frac{1}{T_i s})$  que compleixi aquestes especificacions:

Error de velocitat:  $e_v = 0$   
 Temps d'establiment:  $t_{s\pm 2\%} \leq 4$  s.  
 Sobrepic: del 5% en resposta a un graó

Suposeu que hi ha dos pols dominants.

4. Trieu un controlador proporcional-integral-derivatiu (PID)  $G_c(s) = K(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s)$  que compleixi aquestes especificacions:

Error de velocitat:  $e_v = 0$   
 Temps d'establiment:  $t_{s\pm 2\%} = 0.57$  s.  
 Sobrepic: del 5% en resposta a un graó

Utilitzeu els dos criteris de selecció dels zeros:

- (a) Escolliu un zero prop de l'origen.
- (b) Escolliu un zero real doble.

**Problema 125** Es disposa d'un procés  $G(s) = \frac{4}{s+8}$ . Es vol que aquest segueixi a consignes graó amb les especificacions següents:  $e_p(\infty) = 0$ ,  $SP \leq 10\%$  i  $t_{s\pm 2\%} \leq 0.9$  s. Prenent  $G(s)$  en laç obert, determineu la sortida  $y(t)$  per a una entrada  $r(t) = 5u(t)$  i

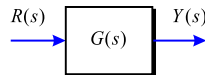


Figura 4-14

expliqueu perquè farà falta controlar aquest procés. Representeu  $y(t)$  gràficament. Per controlar el procés  $G(s)$ , es realimenta aquest tot posant un regulador  $G_c(s)$  com el de la Figura 4-15, i amb un sensor de primer ordre  $H(s) = \frac{1}{s+2}$ .

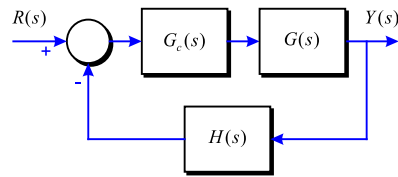


Figura 4-15

Utilitzant el mètode del lloc de les arrels, dissenyeu un controlador  $G_c(s)$  per tal de que el sistema compleixi amb les especificacions. Justifiqueu l'elecció del tipus de controlador.

## 5. DOMINI FREQUÈNCIAL

### 5.1 Diagrames de Bode

**Problema 126** Grafiqueu els diagrames de Bode de les funcions de transferència de la trajectòria directa donades.

$$1) \quad G(s) = \frac{5}{s(1 + 0.5s)(1 + 0.1s)}$$

$$5) \quad G(s) = \frac{(s^2 + 1600)(s^2 + 3600)}{(s^2 + 10s + 900)(s^2 + 26.5s + 6400)}$$

$$2) \quad G(s) = \frac{500}{(s + 1.2)(s + 4)(s + 10)}$$

$$6) \quad G(s) = \frac{10(s + 1)}{s(s + 2)(s + 10)}$$

$$3) \quad G(s) = \frac{0.5}{s(s^2 + s + 1)}$$

$$7) \quad G(s) = \frac{100e^{-s}}{s(s^2 + 10s + 50)}$$

$$4) \quad G(s) = \frac{50(s + 3)}{s^2 + 60s + 900}$$

$$8) \quad G(s) = \frac{10(s + 5)}{s(s^2 + 5s + 5)}$$

**Problema 127** Es disposa d'un sistema que té per funció de transferència  $H(s)$  i se'l realimenta de la forma que es veu a la Figura 5-1.

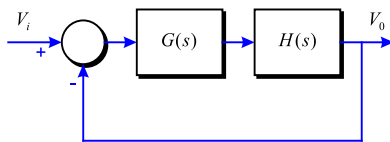


Figura 5-1

1. Quina serà l'expressió de la funció de transferència del sistema  $M(s) = \frac{V_0}{V_i}$  en funció de  $H(s)$  i  $G(s)$ ?

El sistema  $H(s)$  té una funció de transferència de la forma:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

2. És estable el sistema  $H(s)$ ? Per què?
3. Ara es realimenta com es mostra a la Figura anterior i amb  $G(s) = s + K$ .  
Determineu l'expressió que tindrà  $H_T(s)$  en funció de  $K$ . Quin valor de  $K$  crític converteix el sistema en inestable?

4. Per  $K = 98$ , la funció de transferència global pren la forma  $M(s) = \frac{s + 98}{s^2 + 4s + 100}$ .

Representeu el diagrama de Bode d'aquesta funció. Dibuixeu primer les asímtotes indicant-ne els punts més importants, i després la gràfica real de forma aproximada.

**Problema 128** Dibuixeu el diagrama de Bode (mòdul i fase) del circuit de la Figura 5-2 amb:  $R_E = 4.14 \text{ K}\Omega$ ,  $C_E = 1 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $R_r = 62.8 \text{ K}\Omega$  i  $C_r = 10 \text{ nF}$ .

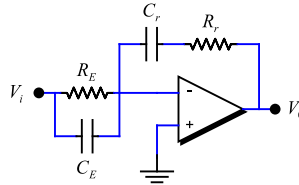


Figura 5-2

**Problema 129** L'inversor de la Figura 5-3 té per resposta freqüencial el diagrama de la Figura 5-4.

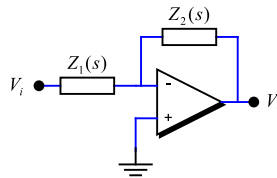


Figura 5-3

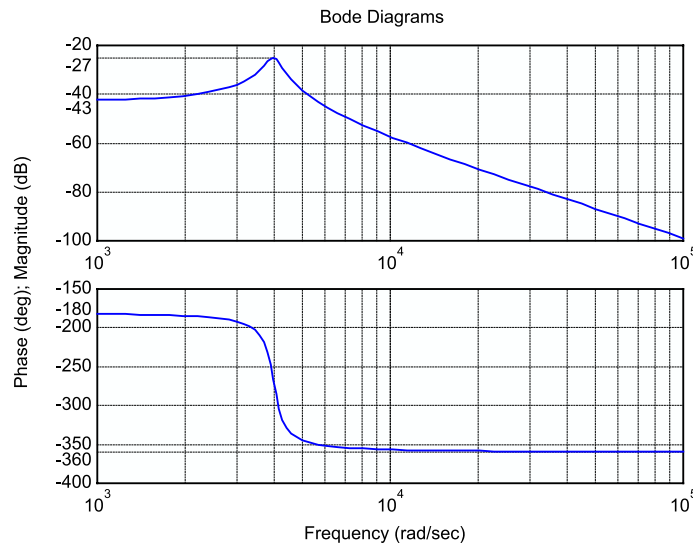


Figura 5-4

Quin és l'ordre del sistema? Per què?

Una possible funció de transferència que s'ajusta a aquesta resposta és la que segueix:

$$H(s) = K \cdot \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Si se sap que  $\zeta = 0.0625$ , determineu quin ha de ser el valor de  $K$  i quin el valor de  $\omega_0$ .

**Problema 130** Es vol fer l'anàlisi en freqüència del circuit de la Figura 5-5.

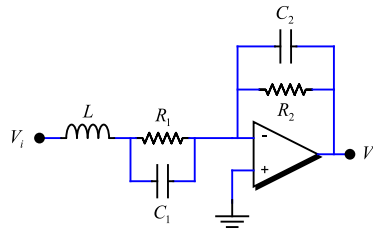


Figura 5-5

Aprofitant l'estructura d'amplificador inversor que té l'esquema de la Figura 5-6.

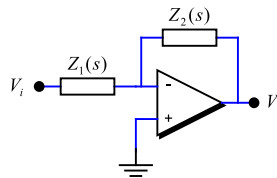


Figura 5-6

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

1. Determineu la funció de transferència del circuit  $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ . De quin ordre és el sistema?
2. Amb els valors dels components que segueixen,  $L = 280$  mH,  $R_1 = 2$  K $\Omega$ ,  $C_1 = 100$  nF,  $R_2 = 25$  K $\Omega$ ,  $C_2 = 10$  nF, calculeu els valors dels pols i dels zeros del sistema.
3. Representeu el diagrama de Bode del circuit anterior, indicant clarament les asímptotes amb els corresponents pendents, i el valor dels punts més significatius del diagrama.

**Problema 131** A partir del model d'un sistema de control com el que ens ve descrit pel diagrama de blocs de la Figura 5-7, on:

$$G(s) = \frac{e^{-2s}}{10s^2 + 21s + 2}$$

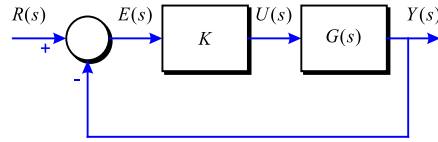


Figura 5-7

1. Representeu el diagrama de Bode de magnitud de  $G(s)$ . (Diagrama asimptòtic).
2. Representeu el diagrama de Bode de fase de  $G(s)$ . (Per fer-ho calculeu els valors exactes de la fase per les freqüències 0.01, 0.1, 1, i 10).
3. Mirant els diagrames de Bode obtinguts, per a quin valor de  $K$  el sistema serà inestable?

**Problema 132** Obteniu el diagrama de Bode asimptòtic del sistema,

$$M(s) = \frac{100K}{s^2 + (K+1)s + (K+24)}$$

sabent que és estable, que per  $\omega = 0.1$  el mòdul de  $M(j\omega)$  val 12.0412 dB i que la fase per a la freqüència natural no esmorteïda  $\omega_n$  és de  $-90^\circ$ .

**Problema 133** Donada la funció de transferència en trajectòria directa:

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(1+0.1s)(1+0.2s)(1+0.5s)}$$

1. Dibuixeu els diagrames de Bode de guany i fase, suposant  $K = 1$ .
2. Doneu el valor aproximat del marge de guany i marge de fase, trobat gràficament sobre el diagrama de Bode.
3. Trobeu  $K$  per a que el marge de guany del sistema sigui 20 dB.
4. Trobeu  $K$  per a que el marge de fase del sistema sigui de  $45^\circ$ .

## 5.2 Estabilitat relativa

**Problema 134** A partir del diagrama de blocs de la Figura 5-8, on:

$$G(s) = \frac{50Ke^{-0.05s}}{s^2 + 5s + 25}$$

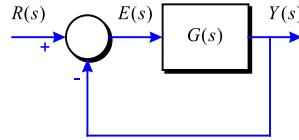


Figura 5-8

1. Prenent  $K = 1$ , dibuixeu el diagrama de Bode de Magnitud.
2. Prenent  $K = 1$ , dibuixeu el diagrama de Bode de Fase del sistema amb retard. (Dóna valors mitjançant l'expressió analítica).
3. Trobeu els valors (exactes) del marge de guany i marge de fase.
4. Determineu quin guany  $K$  s'hauria de posar al sistema si es volgués aconseguir un Marge de Fase entre  $50$  i  $55^\circ$ .

**Problema 135** Donat el sistema enllaç obert  $G(s) = \frac{150}{s(s+5)}$ , determineu:

1. La magnitud màxima de la resposta en freqüència del sistema enllaç tancat amb realimentació unitària.
2. L'ample de banda  $\omega_b$  i la freqüència de ressonància  $\omega_r$  del sistema enllaç tancat.
3. Estimeu el sobrepic  $SP$  que tindrà el sistema enllaç tancat per a una entrada graó unitari i comenteu l'exactitud del càlcul.

**Problema 136** Un sistema té la funció de transferència enllaç obert següent:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(2s+1)}$$

1. És estable per  $K = 2$ ?
2. Trobeu el valor crític del guany  $K$  per mantenir l'estabilitat.

**Problema 137** Un sistema enllaç tancat com el de la Figura 5-9 té  $H(s) = 1$  i  $G(s) = \frac{K}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$  amb  $\tau_1 = 0.02$  i  $\tau_2 = 0.2$  s.

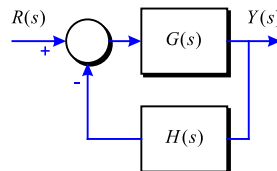


Figura 5-9

1. Determineu el guany  $K$  per a que  $e_v(\infty) = 10\%$  (entrada rampa).
2. Representeu el diagrama de Bode per aquesta  $K$  i calculeu el marge de guany  $MG$  i el marge de fase  $MF$ . (Calculeu  $wc$  de forma aproximada amb asymptotes).
3. Obteniu l'ample de banda  $\omega_b$ .

**Problema 138** Considereu un sistema amb realimentació unitària on  $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$  en el llac directe.

1. Per  $K = 4$ , quant val el marge de guany  $MG$  del sistema?
2. Si es vol tenir un marge de guany de  $MG = 16$  dB, quin valor de  $K$  és necessari?
3. Determineu el marge de fase  $MF$  per  $K = 3$ .

Dada: Les arrels del polinomi  $x^6 + 5x^4 + 4x^2 - 9$  són  $(-0.25 \pm 1.74j)$ ,  $(0.25 \pm 1.74j)$ ,  $(\pm 0.969)$ .

**Problema 139** Un sistema amb realimentació unitària té el procés en el llac directe següent:

$$G(s) = \frac{11.7}{s(0.05s+1)(0.1s+1)}$$

1. Representeu el diagrama de Bode i determineu el  $MF$  i la freqüència de tall  $\omega_c$  (amb el diagrama asimptòtic).
2. Repetiu el procés anterior suposant que ara disposeu d'unes mesures de mòdul i fase exactes del sistema  $G(s)$ . Comenteu les possibles diferències.

Magnitud	Fase	$\omega$
18.6728	-95.3667	0.6251
16.2047	-96.1773	0.7197
12.1936	-98.1813	0.9541
10.5709	-99.4130	1.0985
6.8573	-104.3116	1.6768
3.7675	-114.8029	2.9471
2.7376	-122.3936	3.9069
2.3141	-126.8964	4.4984
1.9418	-131.9009	5.1795
1.6148	-137.4138	5.9636
1.3285	-143.4240	6.8665
1.0796	-149.8990	7.9060
0.8651	-156.7842	9.1030
0.6825	-164.0028	10.4811
0.5296	-171.4600	12.0679
0.4039	-179.0475	13.8950
0.3027	-186.6497	15.9986
0.2229	-194.1501	18.4207
0.0561	-221.1284	32.3746



**Problema 140** Un sistema de control presenta l'estructura que es mostra a la Figura 5-10.

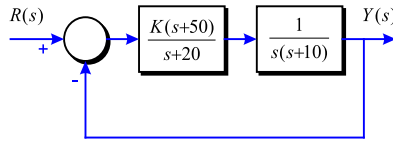


Figura 5-10

Seleccioneu  $K$  de manera que el marge de fase del sistema sigui  $MF \geq 40^\circ$  i el marge de guany  $MG \geq 10$  amb l'ample de banda el més gran possible.

Dada: Les arrels del polinomi  $x^3 + 20\operatorname{tg}(50)x^2 + 1300x - 10^4\operatorname{tg}(50)$  són:  $7.72, -15.77 \pm 35.98j$ .

**Problema 141** Donat un sistema amb la funció de transferència en trajectòria directa següent:

$$G(s) = \frac{200K e^{-T_d s}}{s^2 + 10s + 100}$$

Quan  $K = 1$ , determineu el màxim retard pel qual el sistema en llac tancat és estable.

### 5.3 Disseny freqüencial

**Problema 142** Un actuator electrohidràulic és utilitzat en un robot manipulador de la forma mostrada a la Figura 5-11, amb  $T = 2s$ .

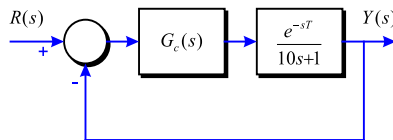


Figura 5-11

Suposant que el sistema treballarà amb consignes graó unitari, i que es vol minimitzar l'error estacionari  $e_p(\infty)$ .

1. Representeu el diagrama de Bode del sistema en llac obert. Per dibuixar la fase, feu-ho punt a punt, calculant el seu valor per freqüències de 0.1 a 1 amb salts de 0.145 rad/s.
2. Si  $G_c(s) = K$ , calculeu el valor de  $K$  pel qual el sistema presentarà un sobrepic  $SP \simeq 10\%$ . Determineu  $e_p(\infty)$  per la  $K$  anterior.
3. Si  $G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s}$ , calculeu el valor de  $K_1$  i  $K_2$  per assolir un sobrepic  $SP \leq 10\%$ . Com a criteri de disseny, preneu el zero del controlador allunyat de la  $\omega_c$  triada.

**Problema 143** Trobeu uns possibles paràmetres d'un controlador PI per a que el sistema  $G(s) = \frac{1}{s(s+10)}$  tingui un marge de fase de  $MF = 65^\circ$ . Dissenyeu-lo:

1. Considerant que el zero del PI no afecta a la fase de la  $\omega_c$  escollida.
2. Fent-lo passar pel punt exacte amb un temps d'establiment  $t_{s\pm 2\%} = 2$  s.

**Problema 144** Donat el sistema de la Figura 5-12:

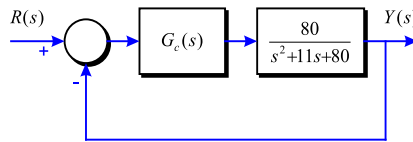


Figura 5-12

Determineu els paràmetres d'un controlador PI per a que  $K_v = 10$  i el marge de fase  $MF$  sigui el màxim possible. Quant valen el marge de guany i el marge de fase del sistema per a aquest PI?

**Problema 145** Dissenyeu un controlador PD per a que el sistema  $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$  amb realimentació unitària presenti un error estacionari a una entrada rampa unitària  $e_v(\infty) \leq 0.1$  i un sobrepic per una entrada graó unitari de  $SP \leq 25\%$ . Per això:

1. Seleccioneu  $K_p$  per complir amb les condicions estacionàries.
2. Amb la  $K_p$  anterior, representeu el diagrama de Bode del sistema  $G(s)$  amb el guany  $K_p$  (sense  $K_d$  encara) i obteniu la freqüència de tall  $\omega_c$ .
3. Determineu el marge de fase  $MF$  del sistema  $G(s)$  amb  $K_p$ . Quina fase ha d'introduir el PD a  $\omega_c$  per tenir el  $MF$  desitjat?
4. Afegiu  $5^\circ$  de marge de seguretat a la fase del PD trobada abans i calculeu la posició del zero del PD perquè així sigui. Determineu el valor de  $K_d$ .
5. Calculeu la freqüència de tall  $\omega_c$  i el  $MF$  reals obtinguts.

**Problema 146** Quins haurien de ser uns possibles paràmetres d'un controlador PD per a que el sistema  $G(s) = \frac{150}{s(s+2.5)(s+6)}$  tingui un marge de fase de  $MF = 45^\circ$  i un temps d'establiment  $t_{s\pm 2\%} = 2$  s per a una entrada graó unitari? Quin error de velocitat  $e_v(\infty)$  té amb els valors trobats? Comproveu que a la freqüència desitjada es té el  $MF$  buscat. Quin problema hi ha si es vol el mateix  $MF$  però  $t_{s\pm 2\%} = 0.5$  s?

**Problema 147** Després de veure a les notícies i als diaris que la NASA només fa que anar perdent sondes per l'espai, i comprovant els brutals i impressionants coneixements sobre sistemes de control adquirits durant el curs, decidim ajudar al disseny del controlador d'una nova sonda per prendre dades del planeta vermell sense estavellar-se ni perdre's.

El model del sistema de control utilitzat és el que es mostra a la Figura 5-13.

$T$  és el retard degut a les comunicacions, i que es pot establir en  $T = 0.5$  s.

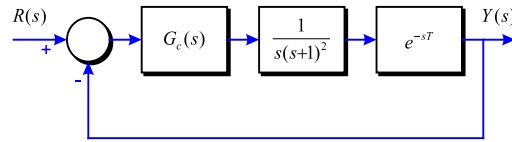


Figura 5-13

1. Representeu el diagrama de Bode de mòdul i fase (asímtotes+diagrama real) de la sonda  $G(s)$  en llac obert i sense retard. Quin marge de guany  $MG$  i marge de fase  $MF$  té el sistema?

Dada: Les arrels del polinomi  $x^3 + x - 1$  són:  $x = 0.6823$ ,  $x = -0.3412 \pm 1.1615j$ .

2. Afegint ara el retard  $T$ , es pot comprovar que el sistema dona uns valors com els de la taula. Demostreu que la fase i el mòdul del sistema  $G(s)$  amb retard per  $\omega_a = 0.1$  i per  $\omega_b = 0.9$  són els donats a la taula. Quin marge de guany  $MG$  i quin marge de fase  $MF$  té aquest sistema sonda  $G(s)$  amb retard? Compara l'estabilitat del sistema amb retard respecte el sistema sense retard.

$\omega$ (rad/s)	Mòdul (lineal)	Fase ( $^\circ$ )
0.100	9.90	-104.28
0.182	5.38	-115.56
0.261	3.60	-126.59
0.285	3.24	-129.98
0.339	2.63	-137.29
0.420	2.02	-147.59
0.500	1.60	-157.45
0.583	1.29	-166.84
0.682	1.00	-178.15
0.701	0.95	-180.03
0.704	0.87	-184.20
0.819	0.73	-192.19
0.900	0.61	-199.75
0.960	0.54	-205.16
1.265	0.30	-229.57
1.340	0.26	-234.92
1.526	0.16	-247.26
1.842	0.12	-265.77
2.223	0.07	-285.24

3. Si es pren com controlador  $G_c(s) = K$ , calculeu el valor de  $K$  per a que el sistema global en llac tancat presenti aproximadament un  $SP \simeq 18\%$  a una entrada graó unitari, éssent la resposta el més ràpida possible. Quin temps d'establiment  $t_{s\pm 2\%}$  s'espera obtenir amb aquesta  $K$ ?
4. Dissenyau un PD per a que la resposta tingui un  $t_{s\pm 2\%} \leq 7$  s. (la fem més ràpida, no sigui que es torni a perdre la sonda), amb el mateix  $SP$  d'abans.

5. És viable en aquest cas fer el disseny del controlador  $G_c(s)$  utilitzant un PI per al sistema amb les mateixes especificacions que a l'apartat anterior? Raoneu la resposta.

**Problema 148** Donat el sistema de la Figura 5-14 dissenyeu un controlador PID per obtenir una resposta al graó unitari amb un sobrepic  $SP \leq 5\%$ , un temps d'establiment  $t_{s \pm 2\%} \leq 7.46$  s i un error estacionari nul degut a una pertorbació  $D(s)$  graó. Considereu el PID amb un zero doble.

Redissenyeu el PID si el que es vol són les mateixes característiques dinàmiques, però amb un error  $e_v(\infty) = 5$ , a una pertorbació rampa unitària.

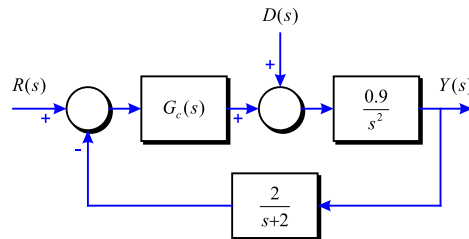


Figura 5-14

**Problema 149** Donat el sistema següent:

$$G(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)}$$

del qual es té la resposta freqüencial a la taula:

$\omega$	Guany	dB	Fase
0.0100	199.9875	46.0201	-90.8594
0.0144	139.0206	42.8616	-91.2362
0.0207	96.6327	39.7025	-91.7781
0.0298	67.1592	36.5421	-92.5574
0.0428	46.6610	33.3791	-93.6778
0.0616	32.3988	30.2106	-95.2878
0.0886	22.4667	27.0308	-97.5986
0.1274	15.5378	23.8278	-100.9075
0.1833	10.6876	20.5776	-105.6234
0.2637	7.2718	17.2328	-112.2809
0.3793	4.8443	13.7045	-121.5079
0.5456	3.1048	9.8405	-133.8730
0.7848	1.8664	5.4199	-149.5475
1.1288	1.0231	0.1985	-167.9045
1.6238	0.5014	-5.9958	-187.4460
2.3357	0.2192	-13.1835	-206.2503
3.3598	0.0869	-21.2237	-222.6611
4.8329	0.0321	-29.8800	-235.8286
6.9519	0.0113	-38.9194	-245.7644
10.0000	0.0039	-48.1723	-252.9795

1. Dissenyeu un controlador PID que faci que el marge de fase del sistema sigui major de  $50^\circ$ , el temps d'establiment sigui menor de 4 segons i l'error estacionari per una entrada rampa sigui nul.
2. Dissenyeu un compensador d'avanç de fase que faci que el marge de fase del sistema sigui major de  $50^\circ$  i el temps d'establiment sigui menor de 4 segons.

**Problema 150** Considereu el sistema de control mostrat a la Figura 5-15 . Dissenyeu un controlador tipus PID tal que l'error estacionari per a una pertorbació constant sigui zero, el marge de fase  $65^\circ$  i l'amplada de banda sigui el més gran possible ( $\omega_c > 0.5$ ). Verifiquen mitjançant Routh-Hurwitz que el sistema resultant és estable.

Nota: Considereu  $T_i \gg T_d$  ( $T_i = 20T_d$ ) de manera que es pugui dissenyar primer un PD i després un PI en sèrie.

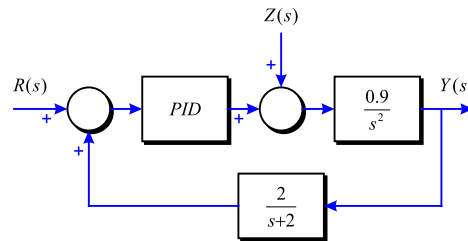


Figura 5-15

**Problema 151** Donat el sistema:

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

trobeu un controlador d'avanç de fase:

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$$

tal que el sistema realimentat compleixi les especificacions següents:

Marge de fase mínim de  $50^\circ$

Constant d'error estacionari de velocitat  $K_v$  mínima de  $20 \text{ s}^{-1}$

**Problema 152** Dissenyeu un controlador d'avanç de fase per a que el sistema amb la funció de transferència en llaç obert  $G(s) = \frac{s+2}{(s+0.1)(s^2+10s+29)}$  tingui un error estacionari per una entrada graó del 1% i un marge de fase de  $60^\circ$ . Ajuda: el diagrama de Bode de  $G(s)$  és el mostrat a la Figura 5-16.

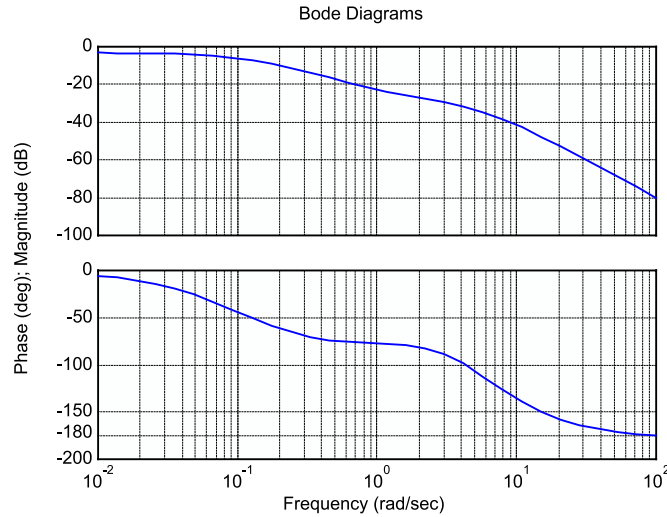


Figura 5-16

**Problema 153** Dissenyeu un compensador d'avanç de fase, de manera que el sistema:

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+5)}$$

presenti un  $MF \geq 50^\circ$  i un  $MG \geq 10$  dB.

**Problema 154** Es disposa del sistema de la Figura 5-17 amb:

$$G(s) = \frac{K}{s\left(\frac{s}{2} + 1\right)\left(\frac{s}{6} + 1\right)}$$

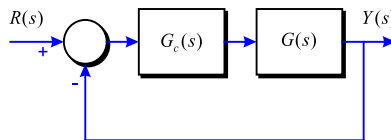


Figura 5-17

1. Dissenyeu un compensador  $G_c(s)$  format per 2 xarxes d'avançament de fase per a tenir una constant d'error de velocitat  $K_v = 20$ , un marge de fase  $MF = 45^\circ$  i un ample de banda  $\omega_b = 4$  rad/s.
2. Dissenyeu un compensador  $G_c(s)$  de retard de fase que compleixi amb les mateixes característiques anteriors però amb  $\omega_b = 4$  rad/s.

**Problema 155** Donat el sistema de control de la Figura 5-18 amb:

$$G(s) = \frac{50}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

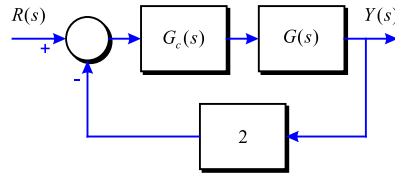


Figura 5-18

1. Dissenyeu un compensador  $G_c(s)$  d'avanç de fase per a obtenir un temps d'establiment  $t_{s\pm 2\%} \leq 2$  s.
2. Repetiu el disseny amb un compensador  $G_c(s)$  de retard de fase per a obtenir un  $MF \geq 45^\circ$ .

**Problema 156** Donat el sistema:

$$G(s) = \frac{50K e^{-0.05s}}{s^2 + 5s + 25}$$

1. Trobeu un controlador d'avanç de fase tal que el sistema controlat tingui un marge de fase de  $65^\circ$  per a una freqüència de tall  $\omega_c = 10$  rad/s.
2. Trobeu un controlador de retard de fase tal que el sistema controlat tingui un error estacionari de posició menor del 5% i un marge de fase de  $65^\circ$  a la major freqüència possible.

**Problema 157** Determineu els paràmetres d'un compensador de retard de fase per a que el sistema:

$$G(s) = \frac{4 \cdot 10^9}{(s + 10^3)^3}$$

presenti un  $MF = 60^\circ$  i una constant d'error de posició  $K_p \geq 100$ .

**Problema 158** Donat el sistema de la Figura 5-19:

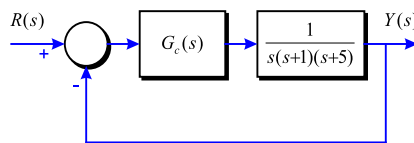


Figura 5-19

Dissenyeu un compensador d'avanç-retard tal que el sistema global tingui  $K_v = 20$ ,  $MF = 60^\circ$  i  $MG \geq 8$  dB.

**Problema 159** Si es vol que el sistema de la Figura 159 compleixi amb  $t_{s\pm 2\%} < 1.6$  s,  $K_v = 80$ ,  $SP \leq 16\%$ .

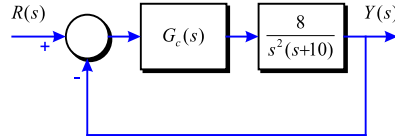


Figura 5-20

1. Comproveu que no es possible assolir les especificacions amb un compensador d'avang ni amb un de retard.
2. Dissenyeu un compensador d'avang-retard per tal de complir les especificacions proposades.

**Problema 160** Dissenyeu un compensador per a que el sistema de la Figura 5-21 amb:

$$G(s) = \frac{100}{s \left( \frac{s^2}{6400} + \frac{s}{50} + 1 \right)}$$

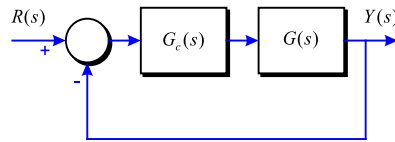


Figura 5-21

tingui una constant d'error de velocitat  $K_v = 20$  i un  $SP \leq 16\%$  per a una entrada graó.

**Problema 161** Dissenyeu un compensador per a que el sistema:

$$G(s) = \frac{10 \cdot e^{-sT}}{s^2(s+10)}$$

amb  $T = 50$  ms, en llaç tancat presenti  $MP\omega < 3.5$  dB i  $\omega_r \simeq 1.4$  rad/s.

**Problema 162** Donat el sistema de la Figura 5-22:

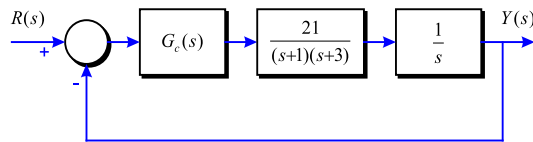


Figura 5-22

1. Dissenyeu un compensador d'avang de fase per a tenir un guany en contínua de 0.5, un marge de fase  $MF = 40^\circ$  i un temps d'establiment  $t_{s \pm 2\%} \leq 4$  s.



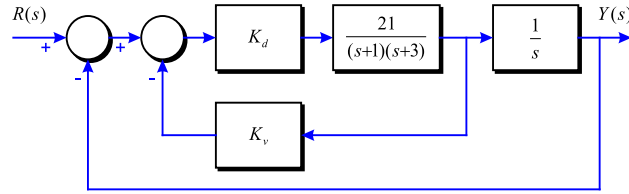


Figura 5-23

2. Repetiu el disseny anterior suposant ara que  $G_c(s)$  és un controlador PD.
3. Es proposa una estructura de controlador PD com la donada a la Figura 5-23.

Trobeu el valor dels paràmetres  $K_d$  i  $K_v$  per assolir les mateixes especificacions que als apartats anteriors.

**Problema 163** Un procés de barreja de líquids per obtenir un grau d'acidesa concret, és el donat a la Figura 5-24 on  $D$  és la distància del controlador al sensor de mesura del pH.

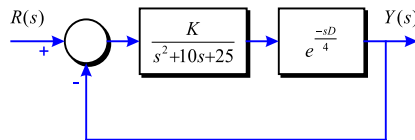


Figura 5-24

1. Prenent  $D = 2$ , representeu el diagrama de Bode del sistema amb retard (fase donant valors) amb  $K = 1$ . Trobeu un valor de  $K$  tal que el  $MF \simeq 60^\circ$ .
2. Amb aquesta  $K$ , a quina distància màxima  $D$  es podrà col·locar el sensor sense fer el sistema inestable?
3. Trobeu un controlador amb el qual es pugui aconseguir això amb un  $e_p(\infty) = 0$ . Comproveu el  $MF$  obtingut a la freqüència de tall  $\omega_c$  i el  $MG$  del sistema.

**Problema 164** Es disposa d'un procés  $G(s) = \frac{4}{s+8}$ . Es vol que aquest segueixi a consignes graó amb les especificacions següents:  $e_p(\infty) = 0$ ,  $SP \leq 10\%$  i  $t_{s\pm 2\%} \leq 0.9$  s. Prenent  $G(s)$  en llaç obert:

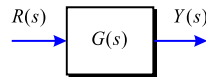


Figura 5-25

1. Determineu la sortida  $y(t)$  per a una entrada  $r(t) = 5u(t)$  i expliqueu perquè farà falta controlar aquest procés. Representeu  $y(t)$  gràficament.

Per controlar el procés  $G(s)$ , es realimenta aquest tot posant un regulador  $G_c(s)$  com el de la Figura 5-26, i amb un sensor  $H(s) = \frac{1}{s+2}$ .

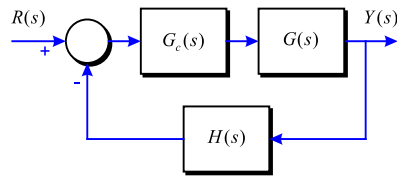


Figura 5-26

2. Utilitzant mètodes freqüencials, dissenyeu un controlador  $G_c(s)$  de manera que el sistema compleixi amb les especificacions. Justifiqueu l'elecció del tipus de controlador. Calculeu el marge de fase  $MF$  i el marge de guany  $MG$  del sistema+controlador en llaç obert a la freqüència de tall  $\omega_c$  escollida.

## 6. ESPAI D'ESTATS

---

### 6.1 Anàlisi en l'espai d'estats

**Problema 165** Considereu el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

és totalment observable?

**Problema 166** Donat el sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

és totalment controlable?

### 6.2 Disseny de controladors en l'espai d'estats

**Problema 167** Dissenyeu un controlador en l'espai d'estats pel sistema següent:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

de tal manera que els pols del sistema en llaç tancat venen donats per  $(\lambda_1, \lambda_2)$  on  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  són simètrics.

**Problema 168** Dissenyeu un controlador en l'espai d'estats pel sistema següent:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

de tal manera que els pols del sistema en llaç tancat venen donats per  $(-2, -2 \pm 2j)$ .

**Problema 169** Dissenyeu un controlador en l'espai d'estats pel sistema següent:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

de tal manera que els pols del sistema enllaç tancat venen donats per  $(\lambda_1, \lambda_2)$  on  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  són simètrics.

**Problema 170** El sistema següent és un model linealitzat d'un pèndul invertit amb una barra de longitud 1 m i una massa puntual de 1 Kg a l'extrem, tal i com es representa a la Figura 6-1.

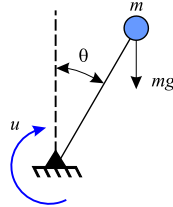


Figura 6-1

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9.8 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

En aquest model  $u$  representa el parell aplicat a la base de la barra i  $y = \theta$  és l'angle entre la barra i el vehicle. Suposant que  $y$  i  $\dot{y}$  són mesurables, dissenyeu un controlador per estabilitzar el sistema tal que el sistema enllaç tancat tingui el pols  $(-\rho, -\rho)$   $\rho > 0$ .

**Problema 171** El sistema següent és un model linealitzat d'un pèndul invertit amb dues barres de longitud 1 m i una massa puntual de 1 Kg a l'extrem, tal i com es representa a la Figura 6-2.

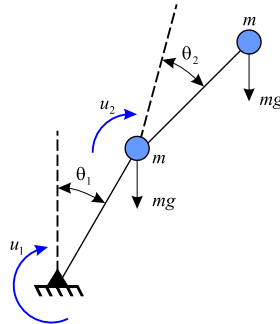


Figura 6-2

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9.8 & 0 & -9.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9.8 & 0 & 29.4 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad x = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

En aquest model  $u_1$  i  $u_2$  representen els parell aplicats a les bases de les dues barres i  $y_1 = \theta_1$  i  $y_2 = \theta_2$ . Suposant que  $y_1$ ,  $\dot{y}_1$ ,  $y_2$  i  $\dot{y}_2$  són tots mesurables, dissenyeu un controlador per estabilitzar el sistema i que tingui la propietat de minimitzar l'índex següent:

$$J = \int_0^\infty (y'y + \varepsilon u'u) d\tau, \quad \varepsilon = 10^{-5}$$

Determineu els valors propis del sistema amb llaç tancat resultant.

**Problema 172** Repetir l'exercici 171 pel cas que únicament és disponible l'entrada  $u_1$ , per exemple quan el sistema està descrit per:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9.8 & 0 & -9.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9.8 & 0 & 29.4 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

**Problema 173** Es vol controlar el sistema inestable següent :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + s^2 + 3s + 1}$$

Per tal d'aconseguir una resposta sense sobrepic, calculeu una realimentació d'estat  $u = -Kx$ , tal que els pols del sistema en llaç tancat corresponguin als d'un polinomi de Bessel d'ordre 4:

$$\begin{aligned} S_{1,2} &= -0.6573 \pm 0.8302j \\ S_{3,4} &= -0.9047 \pm 0.2711j \end{aligned}$$

Nota: Considereu  $x_1 = y$ ;  $x_2 = \frac{dx_1}{dt}$ ;  $x_3 = \frac{dx_2}{dt}$ ;  $x_4 = \frac{dx_3}{dt}$ ;  $K = [K_1 K_2 K_3 K_4]$

**Problema 174** Donat el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -500 & -125 & -25 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [40 \quad 0 \quad 0]$$

Trobeu les característiques següents de la resposta temporal enfront d'un graó unitari: temps de pic, valor de pic, temps d'establiment, valor estacionari. Dibuixeu-la.

**Problema 175** Donat el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -56 & -14 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Suposant  $u = K(r - y)$ , on  $r$  és el senyal de referència, trobeu el valor de  $K$  que fa que el sistema realimentat tingui les arrels reals a  $s = -3.5 \pm 3.26j$ .



## 7. MATLAB

---

**Problema 176** La funció de transferència de la trajectòria directa d'un sistema amb realimentació unitària és:

$$G(s) = \frac{1 + T_z s}{s(s+1)^2}$$

Calculeu i representeu gràficament les respostes a un graó unitari del sistema enllaç tancat per a  $T_z = 0, 0.5, 1, 10$  i  $50$ . Supposeu condicions inicials a zero.

**Problema 177** La funció de transferència de la trajectòria directa d'un sistema amb realimentació unitària és:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2(1+T_p s)}$$

Calculeu i representeu gràficament les respostes a un graó unitari del sistema enllaç tancat per a  $T_p = 0, 0.5, 0.707$ . Supposeu condicions inicials a zero.

**Problema 178** Aproximeu el sistema següent de tercer ordre mitjançant un altre de segon ordre:

$$G(s) = \frac{10N}{s(s+1)(s+10)}$$

Per  $N = 1$  fins a  $N = 5$ , trobeu la funció de transferència  $G_L(s)$  d'un sistema de segon ordre que s'aproximi al sistema de tercer ordre. Calculeu les respostes a un graó unitari dels sistemes, i observeu la proximitat de l'aproximació. Compareu les arrels de les equacions característiques dels dos sistemes enllaç tancat.

**Problema 179** Un sistema de motor de DC per a controlar la impressió amb una margarita té la funció de transferència següent amb trajectòria directa:

$$G(s) = \frac{891100K}{s(s^2 + 5000s + 566700)}$$

El sistema s'ha d'aproximar mitjançant un sistema de segon ordre.

Suposant  $K = 1$ ,  $K = 100$  i  $K = 1000$  trobeu la funció de segon ordre de  $G_L(s)$  que s'aproxima a  $G(s)$ . Calculeu i representeu gràficament les respostes a un graó unitari. Compareu les arrels de les equacions característiques dels dos sistemes enllaç tancat.

**Problema 180** Aproximeu el sistema de control que es mostra a la Figura quan  $K = -1$  mitjançant un sistema de segon ordre amb la funció de transferència enllaç tancat següent:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1 + c_1 s}{1 + d_1 s + d_2 s^2}$$

on  $c_1$ ,  $d_1$  i  $d_2$  són constants reals.

El sistema en llaç obert és el següent:

$$G(s) = \frac{K(s-1)}{s(s+1)(s+2)}$$

**Problema 181** Un sistema de control amb realimentació unitària té la funció de transferència en trajectòria directa següent:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)(s+20)}$$

1. Per a  $K = 10$  el sistema de quart ordre serà aproximat mitjançant un sistema de segon ordre amb la funció de transferència en llaç tancat següent:

$$L(s) = \frac{1}{1 + d_1 s + d_2 s^2}$$

Trobeu  $d_1$  i  $d_2$ . Calculeu i representeu gràficament les respostes a un graó unitari dels sistemes de quart i segon ordre i compareu. Trobeu les arrels de les equacions característiques.

2. Per a  $K = 10$  aproximeu el sistema mitjançant un model de tercer ordre com:

$$L(s) = \frac{1}{1 + d_1 s + d_2 s^2 + d_3 s^3}$$

Trobeu  $d_1$ ,  $d_2$  i  $d_3$ . Calculeu i representeu gràficament les respostes a un graó unitari dels sistemes de quart i tercer ordre i compareu. Trobeu les arrels de les equacions característiques.

3. Per a  $K = 40$  el sistema de quart ordre serà aproximat mitjançant un sistema de segon ordre amb la funció de transferència en llaç tancat següent:

$$L(s) = \frac{1}{1 + d_1 s + d_2 s^2}$$

Trobeu  $d_1$  i  $d_2$ . Calculeu i representeu gràficament les respostes a un graó unitari dels sistemes de quart i segon ordre i compareu. Trobeu les arrels de les equacions característiques.

4. Per a  $K = 40$  aproximeu el sistema mitjançant un model de tercer ordre com:

$$L(s) = \frac{1}{1 + d_1 s + d_2 s^2 + d_3 s^3}$$

Trobeu  $d_1$ ,  $d_2$  i  $d_3$ . Calculeu i representeu gràficament les respostes a un graó unitari dels sistemes de quart i tercer ordre i compareu. Trobeu les arrels de les equacions característiques.



**Problema 182** Per tal d'identificar un sistema lineal, s'aplica un graó unitari en llaç obert, obtenint-se la resposta de la Figura.

La resposta real queda guardada en una matriu  $M$  de 2 columnes, la primera columna per l'eix horitzontal i la segona columna per l'eix vertical.

1. Quina funció de transferència té el sistema?
2. Feu un esquema de la resposta freqüencial.
3. Representeu el diagrama de Bode de Magnitud i de Fase.
4. Escriviu un script Matlab que permeti fer la representació de la resposta real (la de la Figura) i que la compari amb el model obtingut (sobreposant les dues respostes graó).  
A més a més feu que l'script doni els valors del sobrepic i del temps de pic en els dos casos.
5. En cas que es volgués fer la simulació del model quin temps de mostreig s'hauria d'agafar? Justifiqueu-ho.



# A. TRANSFORMADES DE LAPLACE

## A.1 Taula de transformades directes

	$f(t), t \geq 0$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$t$	$\frac{1}{s^2}$
4	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
5	$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
6	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
8	$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
11	$\frac{1}{b-a} (be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
12	$\frac{1}{ab} \left[ 1 + \frac{1}{a-b} (be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
13	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
14	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
15	$\frac{1}{a^2} (at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
16	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$
17	$\frac{-1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \left( \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi \right)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
18	$1 - \frac{-1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \left( \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi \right)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$

## A.2 Propietats de la transformada de Laplace

1	$\mathcal{L}[Af(t)] = AF(s)$
2	$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
3	$\mathcal{L}_{\pm} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0_{\pm})$
4	$\mathcal{L}_{\pm} \left[ \frac{d^2}{dt^2} f(t) \right] = s^2 F(s) - sf(0_{\pm}) - f'(0_{\pm})$
5	$\mathcal{L}_{\pm} \left[ \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0_{\pm})$ on: $f^{(k-1)}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(t)$
6	$\mathcal{L}_{\pm} [\int f(t) dt] = \frac{F(s)}{s} + \frac{[\int f(t) dt]_{t=0_{\pm}}}{s}$
7	$\mathcal{L}_{\pm} [\int \int f(t) dt dt] = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{[\int f(t) dt]_{t=0_{\pm}}}{s^2} + \frac{[\int \int f(t) dt dt]_{t=0_{\pm}}}{s}$
8	$\mathcal{L}_{\pm} [\int \dots \int f(t) (dt)^n] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{s^{n-k+1}} [\int \dots \int f(t) (dt)^k]_{t=0_{\pm}}$
9	$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$
10	$\mathcal{L}[f(t-a) 1(t-a)] = e^{-as} F(s)$
11	$\mathcal{L}[t f(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$
12	$\mathcal{L} \left[ \frac{1}{t} f(t) \right] = \int_s^{\infty} F(s) ds$
13	$\mathcal{L} \left[ f\left(\frac{t}{a}\right) \right] = aF(as)$

## B. FÓRMULES ÚTILS

### B.1 Resposta temporal

Característiques de la resposta al graó unitari del sistema: $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	
$SP = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$	
$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$	
$t_r = \frac{\pi - \arccos(\zeta)}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$	$t_r = \frac{1 - 0.4167\zeta + 2.917\zeta^2}{\omega_n}$
$t_{s\pm 2\%} \simeq \frac{4}{\zeta\omega_n}$	
$t_{s\pm 5\%} \simeq \frac{3}{\zeta\omega_n}$	
$t_s = \frac{3.2}{\zeta\omega_n}$ per: $0 < \zeta < 0.69$	
$t_s = \frac{4.5\zeta}{\omega_n}$ per: $\zeta > 0.69$	
$t_d = \frac{1.1 + 0.125\zeta + 0.469\zeta^2}{\omega_n}$	$t_d = \frac{1 + 0.7\zeta}{\omega_n}$

### B.2 Resposta freqüencial

Característiques freqüencials d'un sistema de segon ordre
$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$
$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$
$B_\omega = \omega_n \sqrt{(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$

Disseny freqüencial de PID
$K_p = \frac{\cos \theta}{ G(j\omega_c) }$
$K_d\omega_c - \frac{K_i}{\omega_c} = \frac{\sin \theta}{ G(j\omega_c) }$

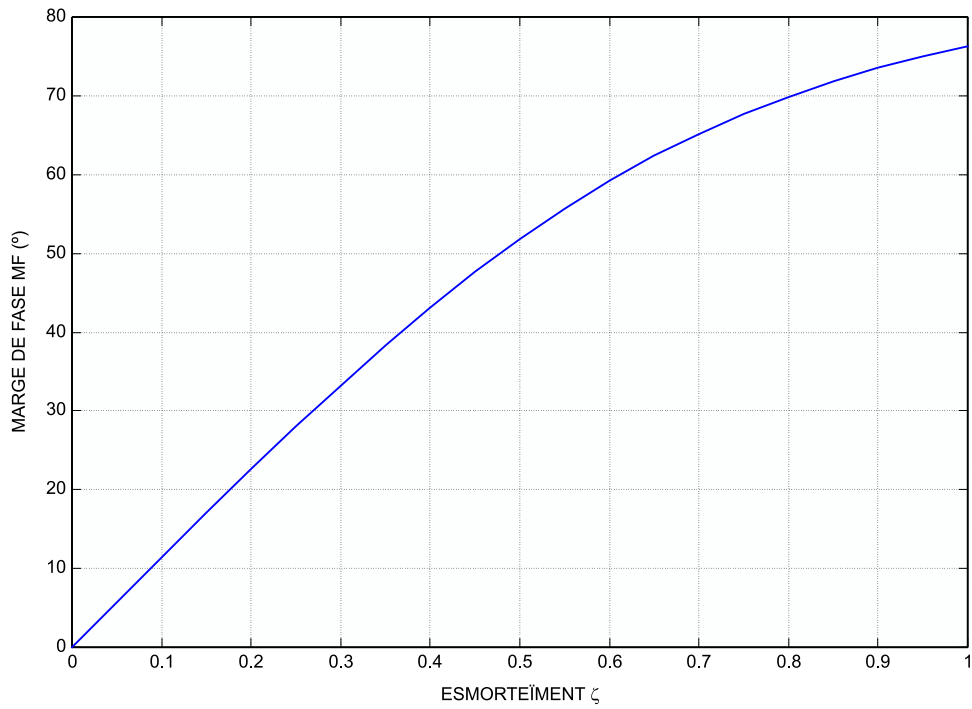


Figura B-1

Coeficients òptims de $T(s)$ basats en el criteri ITAE per una entrada graó			
$s + \omega_n$			
$s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2$			
$s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 2.15\omega_n^2 s + \omega_n^3$			
$s^4 + 2.1\omega_n s^3 + 3.4\omega_n^2 s^2 + 2.7\omega_n^3 s + \omega_n^4$			
$s^5 + 2.8\omega_n s^4 + 5.0\omega_n^2 s^3 + 5.5\omega_n^3 s^2 + 3.4\omega_n^4 s + \omega_n^5$			
$s^6 + 3.25\omega_n s^5 + 6.60\omega_n^2 s^4 + 8.60\omega_n^3 s^3 + 7.45\omega_n^4 s^2 + 3.95\omega_n^5 s + \omega_n^6$			

### B.3 Fórmules de sintonia de reguladors

Regulador P en llaç obert

Mètode	Mode	a	b
Ziegler-Nichols	P	1	-1
Cohen-Coon	P	1.208	-0.956
Lopez, Muril, Smith	P	0.490	-1.084

Regulador PI en llaç obert

Mètode	Mode	a	b	c
Ziegler-Nichols	P	0.9	-1	0
	I	0.3	-1	0
Cohen-Coon	P	0.928	-0.946	0
	I	1.078	-0.583	0
Lopez, Murril, Smith	P	0.859	-0.977	0
	I	0.674	-0.680	0
Rovira	P	0.586	-0.916	0
	I	-0.165	1.0	1.03

Regulador PID en llaç obert

Mètode	Mode	a	b	c
Ziegler-Nichols	P	1.2	-1	0
	I	0.5	-1	0
	D	0.5	1	0
Cohen-Coon	P	1.370	-0.950	0
	I	1.351	-0.738	0
	D	0.365	0.950	0
Lopez, Murril, Smith	P	1.357	-0.947	0
	I	0.842	-0.738	0
	D	0.381	0.995	0

Sintonia en llaç tancat pel mètode de Ziegler-Nichols

Tipus de regulador			
Paràmetres	P	PI	PID
$K_p$	$0.5K_c$	$0.45K_c$	$0.6K_c$
$T_i$	—	$\frac{T_c}{1.2}$	$\frac{T_c}{2}$
$T_d$	—	—	$\frac{T_c}{8}$





# C. COMPENSADORS

## C.1 Compensador d'avanç de fase

### CARACTERÍSTIQUES DELS COMPENSADORS D'AVANÇ

Funció de transferència:

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad 0 < \alpha < 1$$

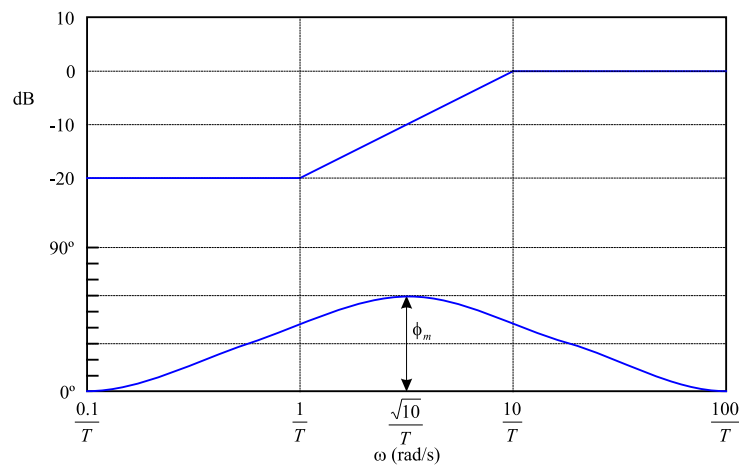


Figura C-1

Angle màxim d'avanç de fase:

$$\sin \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

Freqüència en el punt tangent:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}$$

### TÈCNiques DE COMPENSACIÓ D'AVANÇ BASEDES EN L'ENFOC DE LA RESPOSTA EN FREQUÈNCIA

La funció principal del compensador d'avanç és tornar a donar forma a la corba de resposta en freqüència a fi de poder oferir un angle d'avanç de fase suficient per compensar el retard de fase excessiu associat als components del sistema fix.

Considerem el sistema de la Figura C-2. Supposeu que les especificacions es donen en termes del marge de fase, del marge de guany, de les constants d'error estàtic de velocitat, etc.

El procediment per dissenyar un compensador d'avanç de fase mitjançant l'enfocament de la resposta en freqüència es planteja de la manera següent:

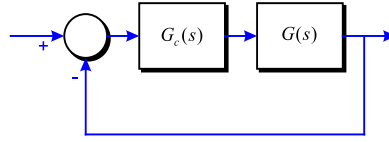


Figura C-2

- Suposeu el compensador d'avanç següent:

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad 0 < \alpha < 1$$

Definiu:

$$K_c \alpha = K$$

Així:

$$G_c(s) = K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$$

La funció de transferència enllaç obert del sistema compensat és:

$$G_c(s) G(s) = K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} G(s) = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} G_1(s)$$

on:

$$G_1(s) = KG(s)$$

Determineu el guany  $K$  que satisfaci el requeriment sobre la constant estàtica d'error determinada.

- Utilitzant el guany  $K$  determinat, dibuixeu les traces del Bode de  $G_1(j\omega)$ , el sistema amb el guany ajustat però sense compensar. Calculeu el valor del marge de fase.
- Determineu l'angle d'avanç de fase  $\phi$  necessari que s'afegirà al sistema.
- Determineu el factor d'atenuació  $\alpha$ . Establiu la freqüència a la qual la magnitud del sistema no compensat  $G_1(j\omega)$  és igual a  $-20 \log \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right)$ .

Selecioneu aquesta freqüència com a la nova freqüència de tall de guany. Aquesta correspon a  $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$  i el màxim canvi de fase es produeix a aquesta freqüència.

- Determineu les freqüències de colze del compensador d'avanç de la manera següent:

$$\text{Zero del compensador d'avanç:} \quad \omega = \frac{1}{T}$$

$$\text{Pol del compensador d'avanç:} \quad \omega = \frac{1}{\alpha T}$$

6. Utilitzant el valor de  $K$  determinat al pas 1 i el de  $\alpha$  establert al pas 4, calculeu la constant  $K_c$  a partir de:

$$K_c = \frac{K}{\alpha}$$

7. Verifiquen el marge de guany per assegurar que és satisfactori. Si no és així, repetiu el procés de disseny modificant la ubicació dels pols i zeros del compensador fins a obtenir un resultat satisfactori.

## C.2 Compensador de retard de fase

### CARACTERÍSTIQUES DELS COMPENSADORS DE RETARD

Funció de transferència:

$$G_c(s) = K_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad \beta > 1$$

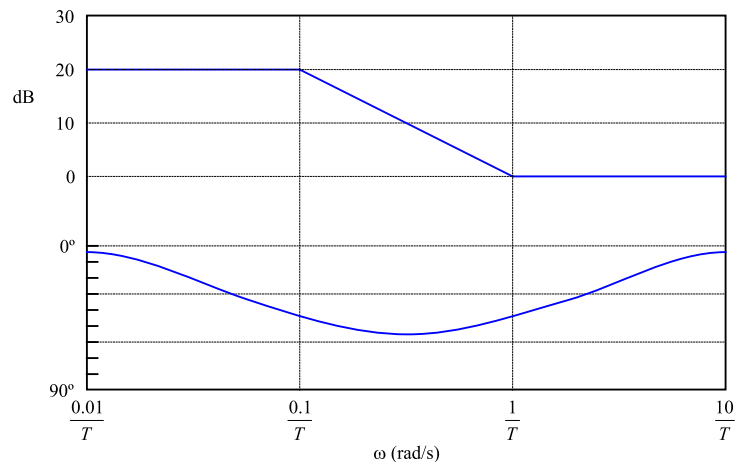


Figura C-3

### TÈCNIQUES DE COMPENSACIÓ DE RETARD BASEDES EN L'ENFOC DE LA RESPONDA EN FREQUÈNCIA

La funció principal d'un compensador de retard és proporcionar una atenuació al rang de les freqüències altes per tal d'aportar un marge de fase suficient al sistema. La característica de retard de fase no afecta la compensació de retard.

El procediment per dissenyar compensadors de retard pel sistema de la figura C-2, mitjançant l'enfocament de la resposta en freqüència, es planteja de la manera següent:

1. Supposeu el compensador de retard següent:

$$G_c(s) = K_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad \beta > 1$$

Definiu:

$$K_c \beta = K$$

De manera que:

$$G_c(s) = K \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}$$

La funció de transferència en llaç obert del sistema compensat és:

$$G_c(s) G(s) = K \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} G(s) = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} G_1(s)$$

on:

$$G_1(s) = KG(s)$$

Determineu el guany  $K$  que satisfaci el requeriment en la constant d'error estàtic establerta.

2. Si el sistema no compensat  $G_1(j\omega) = KG(j\omega)$  no satisfà les especificacions en els marges de fase i de guany, trobeu el punt de freqüència en el qual l'angle de fase de la funció de transferència en llaç obert sigui igual a  $-180^\circ$  més el marge de fase requerit. Aquest és el marge de fase especificat entre  $5$  i  $12^\circ$ . (Afegiu entre  $5$  i  $12^\circ$  per tal de compensar el retard de fase introduït per aquest controlador). Seleccioneu aquesta freqüència com la nova freqüència de tall de guany.
3. Per evitar els efectes nocius del retard de fase produït pel compensador de retard, el pol i el zero del compensador de retard han d'ubicar-se molt més avall que la nova freqüència de tall de guany. Per tant, seleccioneu la freqüència de colze  $\omega = 1/T$  (que correspon al zero del compensador de retard) entre una octava i una dècada per sota de la nova freqüència de tall de guany. (Si les constants de temps del compensador de retard no es tornen massa grans, seleccioneu la freqüència de colze  $\omega = 1/T$  una dècada per sota de la nova freqüència de tall de guany).
4. Determineu l'atenuació necessària per disminuir la corba de magnitud a  $0$  dB a la nova freqüència de tall de guany. Considerant que aquesta atenuació és de  $-20 \log \beta$ , determineu el valor de  $\beta$ . Llavors obteniu l'altre freqüència de colze (que correspon al pol del compensador de retard) a partir de  $\omega = 1/(\beta/T)$ .
5. Utilitzant el valor de  $K$  determinat al pas 1 i el de  $\beta$  establert al pas 4, calculeu la constant  $K_c$  a partir de:

$$K_c = \frac{K}{\beta}$$

### C.3 Compensador d'avanç-retard

#### CARACTERÍSTIQUES DELS COMPENSADORS D'AVANÇ-RETARD

Funció de transferència:

$$G_c(s) = K_c \left( \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \left( \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) \quad \begin{array}{l} \gamma > 1 \\ \beta > 1 \end{array}$$

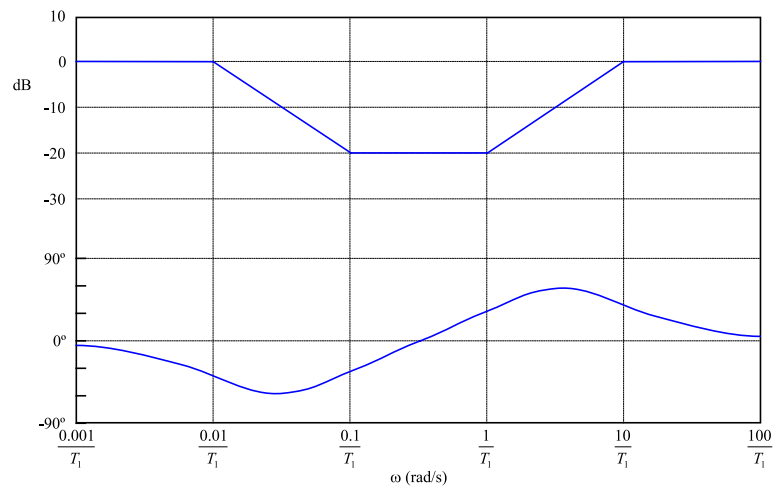


Figura C-4

#### PROCEDIMENT PER AL DISSENY D'UN COMPENSADOR D'AVANÇ-RETARD

Amb els compensadors de retard de fase no és possible mantenir el  $MF$  desitjat i a la vegada aconseguir un sistema molt més ràpid. Hi ha un compromís entre una especificació i l'altre. És en aquests casos on serà útil l'ús dels compensadors d'avanç-retard.

El procediment per dissenyar compensadors d'avanç-retard mitjançant mètodes freqüencials es pot plantejar com segueix:

1. Dissenyeu la part corresponent al retard de fase que proporcioni una part arbitrària del  $MF$  desitjat i les condicions estàtiques.

$$\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \quad \beta > 1$$

2. Partint de la funció de transferència enllaç obert que ja inclou el retard de fase dissenyat,

$$G(s) \left( \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) \quad \beta > 1$$

calculeu els paràmetres de la part d'avançament de fase que s'ha d'afegir al sistema per tal d'acabar de complir amb les especificacions desitjades.

$$\frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad 0 < \alpha < 1$$

## D. REGLES GENERALS PER A CONSTRUIR EL LLOC GEOMÈTRIC DE LES ARRELS

---

1. Ubiqueu els pols i zeros de  $G(s)H(s)$  al pla  $s$ . Les ramificacions del lloc geomètric de les arrels comencen als pols en llaç obert i acaben als zeros (zeros finits o zeros a l'infinit).
2. Determineu els llocs geomètrics de les arrels sobre l'eix real.
3. Determineu les asímptotes dels llocs geomètrics de les arrels.
4. Trobeu els breakpoints.
5. Determineu l'angle de sortida (angle d'arribada) d'un lloc geomètric de les arrels a partir d'un pol complex (un zero complex).
6. Trobeu els punts en els quals els llocs geomètrics de les arrels tallen a l'eix imaginari.
7. Agafant una sèrie de punts de prova de la proximitat àmplia de l'origen del pla  $s$ , dibuixeu els llocs geomètrics.
8. Determineu els pols en llaç tancat.





## E. APROXIMACIÓ A SISTEMES D'ORDRE SUPERIOR

---

Aproximació a sistemes d'ordre superior per sistemes d'ordre baix en els casos que no existeix dominància de pols.

En general, sempre que sigui possible, interessarà treballar amb sistemes de control d'ordre el més baix possible, per tal de simplificar l'esforç en anàlisi i disseny.

Objectiu: A partir d'una funció d'ordre superior  $M_H(s)$  trobeu  $M_L(s)$  d'ordre inferior, per tal que en resulti una resposta aproximada i que els 2 sistemes siguin similars segons uns criteris preestablerts.

Les tècniques que s'expliquen responen a casos en els quals no existeix dominància de pols, però que per simplificar interessa fer la reducció (Normalment de sistemes d'ordre superior a 2 es passa a sistemes de segon ordre).

### CRITERI D'APROXIMACIÓ

Es vol passar de  $M_H(s)$  a  $M_L(s)$ , on:

$$M_H(s) = K \frac{1 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m}{1 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n} \quad \text{on: } m \leq n$$

$$M_L(s) = K \frac{1 + c_1s + c_2s^2 + \dots + c_qs^q}{1 + d_1s + d_2s^2 + \dots + d_ps^p} \quad \text{on: } n \geq p \geq q$$

### HIPOTESIS QUE ES FAN

1. El guany  $K$  en les 2 funcions de transferència és el mateix.
2. El pol de  $M_H(s)$  i  $M_L(s)$  tots són al semipla esquerra.

### CONDICIÓ DE PARTIDA DEL CRITERI QUE S'IMPOSA PER TAL QUE ES PUGUI REALITZAR LA REDUCCIÓ

Es vol que les característiques d'amplitud dels sistemes siguin idèntiques:

$$\frac{|M_H(j\omega)|^2}{|M_L(j\omega)|^2} = 1 \quad 0 \leq \omega \leq \infty \quad (\text{E.1})$$

### PASSES DEL CRITERI D'APROXIMACIÓ

1. Es troba la funció de transferència d'ordre superior en llaç tancat  $M_H(s)$ , posant el guany del sistema a 1 (terme independent igual a 1).
2. S'aproxima a una funció d'ordre inferior del tipus:

$$M_L(s) = \frac{1 + c_1s + c_2s^2 + \dots + c_qs^q}{1 + d_1s + d_2s^2 + \dots + d_ps^p}$$

3. Es divideixen les funcions  $M_H(s)$  i  $M_L(s)$ :

$$\begin{aligned} \frac{M_H(s)}{M_L(s)} &= \frac{\left( \frac{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n} \right)}{\left( \frac{1 + c_1 s + c_2 s^2 + \dots + c_q s^q}{1 + d_1 s + d_2 s^2 + \dots + d_p s^p} \right)} = \\ &= \frac{(1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m) (1 + d_1 s + d_2 s^2 + \dots + d_p s^p)}{(1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n) (1 + c_1 s + c_2 s^2 + \dots + c_q s^q)} \end{aligned}$$

Operant l'expressió anterior s'obté:

$$\frac{M_H(s)}{M_L(s)} = \frac{1 + m_1 s + m_2 s^2 + \dots + m_u s^u}{1 + l_1 s + l_2 s^2 + \dots + l_v s^v} \quad \text{on:} \quad \begin{array}{l} u = m + p \\ v = n + q \end{array}$$

Si s'aplica ara la condició de partida E.1:

$$\begin{aligned} \frac{|M_H(j\omega)|^2}{|M_L(j\omega)|^2} &= \frac{M_H(s) M_H(-s)}{M_L(s) M_L(-s)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1 + e_2 s^2 + e_4 s^4 + \dots + e_{2u} s^{2u}}{1 + f_2 s^2 + f_4 s^4 + \dots + f_{2v} s^{2v}} \Big|_{s=j\omega} = \\ &= 1 + \frac{(e_2 - f_2) s^2 + (e_4 - f_4) s^4 + \dots}{1 + f_2 s^2 + f_4 s^4 + \dots + f_{2v} s^{2v}} \Big|_{s=j\omega} \end{aligned}$$

Per complir-se la condició de partida, cal igualar termes per tal que tota l'expressió s'anul·li i només quedi 1:

$$\begin{aligned} e_2 &= f_2 \\ e_4 &= f_4 \\ &\vdots \\ e_{2u} &= f_{2u} \end{aligned}$$

Troba aquests valors, es trobaran els coeficients de  $M_L(s)$ , partint de l'expressió:

$$\begin{aligned} \frac{M_H(s) M_H(-s)}{M_L(s) M_L(-s)} &= \frac{(1 + m_1 s + m_2 s^2 + \dots + m_u s^u) (1 - m_1 s + m_2 s^2 - \dots + (-1)^u m_u s^u)}{(1 + l_1 s + l_2 s^2 + \dots + l_v s^v) (1 - l_1 s + l_2 s^2 - \dots + (-1)^v l_v s^v)} = \\ &= \frac{1 + e_2 s^2 + e_4 s^4 + \dots + e_{2u} s^{2u}}{1 + f_2 s^2 + f_4 s^4 + \dots + f_{2v} s^{2v}} \end{aligned}$$

Igualant els numeradors es troben els coeficients  $m_i$ :

$$\begin{aligned} e_2 &= 2m_2 - m_1^2 \\ e_4 &= 2m_4 - 2m_1 m_3 + m_2^2 \\ e_6 &= 2m_6 - 2m_1 m_5 + 2m_2 m_4 - m_3^2 \\ e_8 &= 2m_8 - 2m_1 m_7 + 2m_2 m_6 - 2m_3 m_5 + m_4^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Igualant els denominadors es troben els coeficients  $l_i$ :

$$\begin{aligned} f_2 &= 2l_2 - l_1^2 \\ f_4 &= 2l_4 - 2l_1l_3 + l_2^2 \\ f_6 &= 2l_6 - 2l_1l_5 + 2l_2l_4 - l_3^2 \\ j_8 &= 2l_8 - 2l_1l_7 + 2l_2l_6 - 2l_3l_5 + l_4^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Un cop trobats els coeficients  $l_i$  i  $m_i$  es poden trobar els coeficients  $d_i$  i  $c_i$  de  $M_L(s)$ :

$$M_L(s) = \frac{1 + c_1s + c_2s^2 + \cdots + c_qs^q}{1 + d_1s + d_2s^2 + \cdots + d_ps^p}$$



# F. TEORIA DE MATRIUS

---

## F.1 Definicions

Un conjunt de numeros (o funcions) ordenats en files i columnes s'anomena **matriu**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Els numeros  $a_{ij}$  s'anomenen **elements** de la matriu, amb el subíndex  $i$  denotant la fila i el subíndex  $j$  indicant la columna.

Una matriu amb  $m$  files i  $n$  columnes s'anomena matriu d'**ordre**  $(m,n)$  o alternativament, matriu  $m \times n$ . Quan el nombre de columnes és igual al nombre de files ( $m = n$ ), la matriu s'anomena **matriu quadrada** d'ordre  $n$ .

Una matriu que té una única columna, és a dir, una matriu  $m \times 1$ , es coneix com a matriu columna, o més usualment, com a **vector columna**.

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Anàlogament, un **vector fila** és una col·lecció ordenada de números escrits en una fila, és a dir és una matriu  $1 \times n$ .

$$\mathbf{z} = [z_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_n]$$

Algunes matrius amb característiques distintives reben noms especials. Una matriu quadrada en la qual tots els elements són zero, excepte aquells que estan en la diagonal principal  $a_{11}$ ,  $a_{22}, \dots, a_{nn}$  s'anomena **matriu diagonal**.

Si tots els elements de la matriu diagonal tenen el valor 1, llavors la matriu es coneix com a **matriu identitat**  $\mathbf{I}$ .

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Quan tots els elements de la matriu són iguals a zero, la matriu s'anomena **matriu zero** o **matriu nul·la**.

## F.2 Operacions elementals amb matrius

Si  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  són matriu de la mateixa dimensió, llavors la seva suma es defineix com:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

on:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

La suma es fa element a element. És fàcil comprovar les propietats següents:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} &= \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})\end{aligned}$$

Dues matrius poden ser multiplicades si són compatibles. Donades  $\mathbf{A} = m \times n$  i  $\mathbf{B} = n \times p$ , la matriu  $m \times p$ :

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$$

és el producte de les dues matrius, on:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

La multiplicació de matrius compleix la propietat associativa:

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

però no la propietat commutativa:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

La **traca** d'una matriu quadrada és la suma dels elements de la seva diagonal:

$$\text{traca} \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

La matriu de dimensions  $n \times m$  que s'obté intercanviant les files i columnes de la matriu  $\mathbf{A}$  s'anomena la **trasposada de la matriu A**:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Es diu d'una matriu que és **simetrica** si:

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$$

És fàcil veure que:

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^T &= \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \\ (\mathbf{ABC})^T &= \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T\end{aligned}$$

El **determinant** d'una matriu quadrada es defineix per l'expansió de Laplace següent:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \gamma_{ij} \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n$$

on  $\gamma_{ij}$  s'anomena el **cofactor** i:

$$\gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

on  $\det M_{ij}$  s'anomena un **menor**.  $M_{ij}$  és igual que la matriu  $\mathbf{A}$ , excepte que la seva  $i$ -èssima fila i la seva  $j$ -èssima columna han estat eliminades. Així,  $M_{ij}$  és sempre una matriu de dimensions  $(n-1) \times (n-1)$  i els menors i cofactors són idèntics exceptuant el signe.

L'**adjunta** d'una matriu és la trasposada de la matriu dels seus cofactors:

$$\text{adj} \mathbf{A} = [\gamma_{ij}]^T$$

La inversa d'una matriu quadrada  $\mathbf{A}$  es representa com a  $\mathbf{A}^{-1}$  i es defineix com la matriu que satisfà la relació següent:

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

on  $\mathbf{I}$  és la matriu identitat.

La **inversa** d'una matriu  $\mathbf{A}$  és, sempre que  $\det \mathbf{A} \neq 0$ :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj} \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}}$$

La inversa del producte de dues matrius és el producte de les inverses de les matrius en l'ordre girat:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$$

Igualment:

$$(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$$

## PROPIETATS DEL DETERMINANT

Quan es treballa amb determinants de matrius, les operacions elementals següents (de files o columnes) poden ser útils:

1. Si una fila (o columna) de  $\mathbf{A}$  es multiplica per un escalar  $\alpha$ , la matriu resultant  $\bar{\mathbf{A}}$  té el determinant

$$\det \bar{\mathbf{A}} = \alpha \det \mathbf{A}$$

També:

$$\det(\alpha \mathbf{A}) = \alpha^n \det \mathbf{A}$$

2. Si dues files (o columnes) de  $\mathbf{A}$  s'intercanvien obtenint la matriu resultant  $\bar{\mathbf{A}}$ , llavors:

$$\det \bar{\mathbf{A}} = -\det \mathbf{A}$$

3. Si un múltiple d'una fila (o columna) de  $\mathbf{A}$  se suma a una altra fila (o columna) obtenint la matriu resultant  $\bar{\mathbf{A}}$ , llavors:

$$\det \bar{\mathbf{A}} = \det \mathbf{A}$$

4. És fàcil demostrar també que:

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$$

i

$$\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$$

per tant:

$$\det \mathbf{A} \det \mathbf{A}^{-1} = 1$$

El **rang** d'una matriu correspon al nombre de files i columnes linealment independents que té aquesta. Si el rang de  $\mathbf{A}$  és  $r$ , llavors totes les seves submatrius d'ordre  $(r+1) \times (r+1)$ , són singulars i existeix almenys una submatriu d'ordre  $r \times r$  que és no-singular. És compleix també que:

$$\text{rang files } \mathbf{A} = \text{rang columnes } \mathbf{A}$$

El polinomi característic d'una matriu  $\mathbf{A}$  es defineix com:

$$\begin{aligned} a(s) &\triangleq \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ &= s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n \end{aligned}$$

Es pot escriure:

$$a(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)$$

on  $\{\lambda_i\}$  són els valors propis de  $\mathbf{A}$ .

El teorema de Cayley-Hamilton diu que tota matriu quadrada  $\mathbf{A}$  satisfà el seu polinomi característic. Aixó vol dir que si  $\mathbf{A}$  és una matriu d'ordre  $n \times n$  amb equació característica  $a(s)$  llavors:

$$a(\mathbf{A}) \triangleq \mathbf{A}^n + a_1 \mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \mathbf{A} + a_n \mathbf{I} = 0$$

## VALORS PROPIS I VECTORS PROPIS

Tot escalar  $\lambda$  i vector no nul  $\mathbf{x}$ , que satisfacin:

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$$

es denominen com el valor propi i el **vector propi (dret)** associats a la matriu  $\mathbf{A}$  (notar que  $\mathbf{x}$  apareix a la dreta de  $\mathbf{A}$  a l'equació anterior).

Reordenant termes a l'equació anterior es té:

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{x} = 0$$

Si  $\mathbf{x}$  és no nul, llavors:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$



La normalització dels vectors propis és arbitrària; així, si  $\mathbf{x}$  és un vector propi,  $\alpha\mathbf{x}$  també ho és. Els vectors propis són usualment normalitzats amb mòdul unitari; és a dir,  $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1$ .

Si  $\mathbf{y}^T$  és un vector fila no nul tal que:

$$\mathbf{y}^T \mathbf{A} = \lambda \mathbf{y}^T$$

llavors  $\mathbf{y}$  s'anomena **vector propi (esquerra)** de  $\mathbf{A}$  (notar que  $\mathbf{x}$  apareix a l'esquerra de  $\mathbf{A}$  a l'equació anterior).

Si s'escriu:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}$$

$\mathbf{y}$  no és res més que un vector propi (dret) de  $\mathbf{A}^T$ .