

## PROBLEMA 1

a) Observant el diagrama de Bode donat, veiem que comença amb un pendent, té un pic de ressonància a  $\omega=6 \cdot 10^9$  rad/seg. i que després segueix amb un pendent negatiu. Per tant, d'entrada podríem dir que tenim un o múltiples zeros a l'origen i uns pols complexos conjugats a  $\omega=6 \cdot 10^9$  rad/seg, ja que hi ha un pic de ressonància i el pendent després acaba baixant. S'ha de veure també quants n'hi ha.

Per trobar la multiplicitat dels pols i els zeros es poden traçar les asímptotes del diagrama del mòdul, o bé en aquest cas, observant el diagrama de fase, ja podem extreure'n conclusions. Si el zero a l'origen fos de multiplicitat  $n$ , la fase seria  $n \cdot 90^\circ$ . Com es pot veure aquesta és de  $90^\circ$ , per tant únicament pot haver-hi un zero a l'origen. Es pot comprovar també que el pendent de l'asímtota corresponent és de  $+20$  dB/dec, la qual cosa confirma que es tracta d'un únic zero a l'origen.

Si hi hagués l'efecte d'una constant negativa, hauria d'haver-hi un factor de  $180^\circ$  sumat ( $90^\circ+180^\circ=270^\circ$ ), cosa que no tenim. Per tant, amb això també ja es sap que la constant de Bode serà positiva. A mode de comentari, en el cas que la fase al principi no fos de  $90^\circ$ , sinó per exemple  $180^\circ$  o  $270^\circ$ , després hauríem de trobar el pendent de l'asímtota del diagrama del mòdul per deduir si aquest desfasament és degut simplement a una constant o es provocat per un zero múltiple a l'origen.

Tornant a observar el diagrama de fase, podem veure que les asímptotes d'aquest diagrama passen de  $90^\circ$  al principi a  $-90^\circ$  al final. El salt és a  $\omega=6 \cdot 10^9$  rad/seg. Aquest fet també ens confirma que els pols complexos conjugats situats a aquesta pulsació, són simples, i que per tant l'asímtota per altes freqüències també tindrà un pendent de  $-20$  dB/dec, factor que també es pot comprovar.

Concloent, la funció de transferència buscada ha de tenir: un zero simple a l'origen, una parella de pols complexos conjugats a  $\omega = 6 \cdot 10^9$  rad/seg i una constant positiva. És a dir, tindrà la forma

$$H(s) = K \frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Els pols complexos conjugats introdueixen el seu efecte a l'arrel del terme independent,  $\omega_n$ . Segons el gràfic això passa a  $6 \cdot 10^9$  rad/seg. Per tant  **$\omega_n = 6 \cdot 10^9$  rad/seg.**

Per altra banda, la constant de Bode de la funció de transferència proposada és (normalitzant respecte els termes independents)

$$K_{\text{Bode}} = \frac{K}{\omega_n^2}$$

Mirant el diagrama, si l'asímtota que va cap a l'origen correspon a un zero simple, vol dir que té un pendent de  $+20$  dB/dec. Si busquem el valor d'aquesta asímtota a  $\omega=1$  rad/seg., sabrem el que s'ha desplaçat aquesta respecte els 0 dB, i per tant sabrem el valor de la constant de Bode  $K_{\text{Bode}}$ .

$$\begin{aligned} &\text{Dècades des de } \omega = 1 \text{ rad/seg a} \\ &\omega = 6 \cdot 10^9 \text{ rad/seg} \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ &+20 \text{ dB/dec} \times \text{Log}(6 \cdot 10^9/1) \text{dec} = 195.56 \text{ dB} \end{aligned}$$

Llavors, si l'asíptota a  $\omega = 6 \cdot 10^9 \text{ rad/seg}$  val  $-20 \text{ dB}$ , a  $\omega = 1 \text{ rad/seg}$  ha de valer

$$-20 \text{ dB} - 195.56 \text{ dB} = -215.56 \text{ dB}$$

$$\text{Per tant } K_{\text{Bode}} = -215.56 \text{ dB} \rightarrow K_{\text{Bode}} = 10^{(-215.56/20)} = 1.667 \cdot 10^{-11}$$

I finalment

$$K = K_{\text{Bode}} \omega_n^2 \approx 6 \cdot 10^8$$

Ara només ens manca trobar l'esmoreïment  $\zeta$ . Per això veiem que en el pic de ressonància, el diagrama del mòdul val  $|H(j\omega_n)| = 1$  (0 dB). O sigui,

$$|H(j\omega)| = \frac{K\omega}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (4\zeta^2 \omega_n^2)^2}} = 1 \rightarrow |H(j\omega_n)| = \frac{K\omega_n}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_n^2)^2 + (4\zeta^2 \omega_n^2)^2}} = 1 \rightarrow$$

$$|H(j\omega_n)| = \frac{K\omega_n}{2\zeta\omega_n^2} = \frac{K}{2\zeta\omega_n} = 1 \rightarrow \zeta = \frac{K}{2\omega_n} = 0.05$$

Llavors, la funció de transferència buscada és:

$$|H(s)| = \frac{6 \cdot 10^8 s}{s^2 + 6 \cdot 10^8 s + 3.6 \cdot 10^{19}}$$

b) El circuit donat el podem analitzar com un divisor de tensió, per tant:

$$H(s) = \frac{V_0}{V_i} = \frac{Z(s)}{Ls + \frac{1}{Cs} + Z(s)} = \frac{Cs \cdot Z(s)}{LCs^2 + Cs \cdot Z(s) + 1}$$

Per a que s'assembli a la funció de transferència obtinguda a l'apartat anterior, si prenem la impedància  $Z(s) = R$ , és a dir, que la impedància buscada sigui una resistència, sembla suficient ja que els altres elements passius que coneixem introduïrien zeros dobles a l'origen i/o ens convertirien el sistema en un 3<sup>er</sup> ordre, cosa que no tenim. En aquest cas doncs, i normalitzant

$$H(s) = \frac{V_0}{V_i} = \frac{CsR}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{R}{L} \cdot \frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

c) Identificant termes:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{R}{L} = 6 \cdot 10^8 \\ \frac{1}{LC} = 3.6 \cdot 10^{19} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathbf{R = 6 \cdot 10^8 \cdot L = 6 \cdot 10^8 \cdot 10 \cdot 10^{-9} = 6 \, \Omega} \\ \mathbf{C = 1/(L \cdot 3.6 \cdot 10^{19}) = 1/(10 \cdot 10^{-9} \cdot 3.6 \cdot 10^{19}) = 2.77 \, pF} \end{array}$$

d) Observant el diagrama de Bode, a la pulsació  $\omega = 6 \cdot 10^9$  rad/seg, es veu que el sistema té un guany de 0 dB (1 en lineal) i un desfasament de  $0^\circ$ . Per tant, a la sortida i a l'entrada de l'antena hi haurà exactament el mateix senyal  $V_i(t)$ . Encara que més llarg, també es pot comprovar aquest fet si es calcula  $|H(j\omega_n)|$  i  $\angle H(j\omega_n)$ .

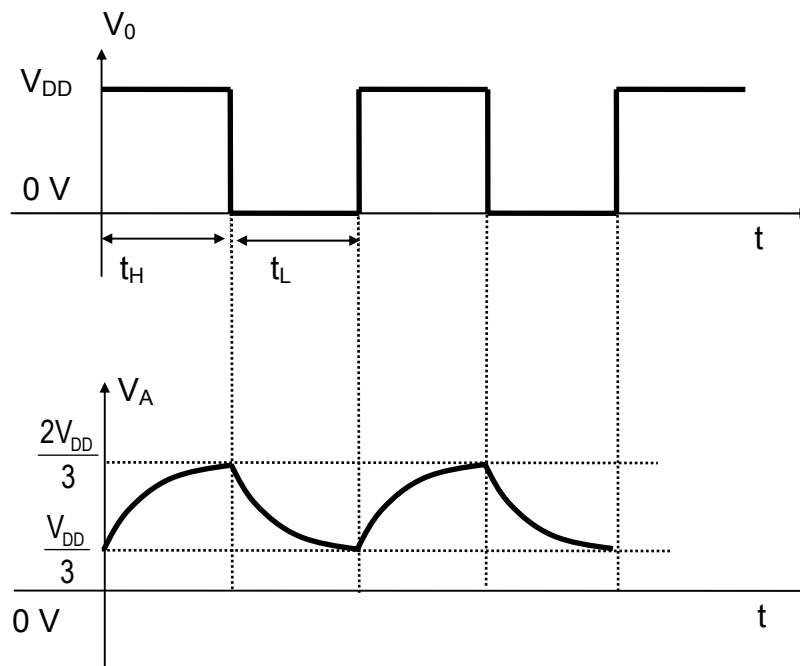
**PROBLEMA 2****(Correspon al problema nº12 d'oscil·ladors de la col·lecció)**

a) Quan la sortida es trobi en estat alt  $V_0 = 10\text{ V}$ , vol dir que abans de l'inversor del model del 555, hi ha un '0', i per tant el transistor estarà tallat. Per tant, el condensador pot carregar-se lliurement cap a  $10\text{ V}$  a través de la resistència  $R_A$ . La resistència  $R_B$  quedarà en circuit obert al estar el transistor tallat.

Mentre el condensador es va carregant, la tensió al pin 2 i al pin 6 aniran canviant de la mateixa forma (estan connectats entre ells a l'esquema proposat). Al pin 5 hi ha una tensió fixa de  $\frac{2V_{DD}}{3}$

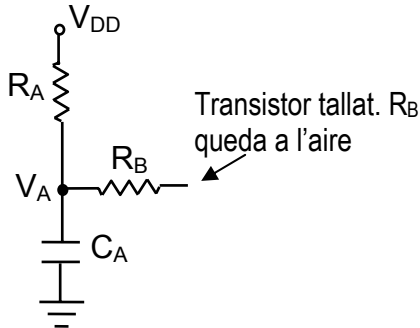
(divisor de tensió). Quan la tensió al condensador assoleixi els  $\frac{2V_{DD}}{3}$ , el comparador format per l'A.O.2 commutarà la seva sortida cap a '1' ( $V_+ > V_-$ ). Per tant, a l'entrada de la bàscula es tindrà  $S=0$ ,  $R=1$ . ( $S=0$  perquè si el condensador assoleix  $\frac{2V_{DD}}{3}$  vol dir que el pin 2 ja fa estona que

està per damunt de  $V_{DD}/3$ , situació que fa commutar a l'A.O1 cap a '0', ja que  $V_+ < V_-$ ). Mirant la taula, quan es té  $S=0$  i  $R=1$ , la sortida de la bàscula val  $\overline{Q}=1$ . Per tant, la sortida del 555 passarà a l'estat  $0\text{ V}$ , el transistor es saturarà, l'A.O2 tornarà a '0' ( $R=0$  i mantindrà l'estat segons les taules) i el condensador es descarregarà amb tendència cap a zero a través de les resistències  $R_A$  i  $R_B$ . Això passarà fins que arribi a descarregar-se a  $V_{DD}/3$ , en que l'A.O1 commutarà a '1', produint un estat  $S=1$ ,  $R=0$ , provocant que la sortida de la bàscula passi a  $\overline{Q}=0$ . Per tant,  $V_0 = 10\text{ V}$ , el transistor tornarà a tallar-se, i fent que el condensador es carregui a través de  $R_A$ , pel que l'A.O1 tornarà a '0', produint-se un estat  $S=0$ ,  $R=0$  que mantindrà la sortida a  $10\text{ V}$ . Ara ja tornem a estar com al principi, i per tant el cicle es va repetint. Amb això les formes d'ona que ens demanen són:



b) Per calcular el temps que la sortida està en estat alt  $t_H$  i en estat baix  $t_L$ , hem de mirar el que tarda el condensador per passar de  $V_{DD}/3$  a carregar-se a  $2V_{DD}/3$  per trobar  $t_H$  i a la inversa per l'estat baix  $t_L$ .

Càrrega del condensador:



El condensador es troba inicialment a  $V_{DD}/3$  i s'anirà carregant cap a  $2V_{DD}/3$  a través de  $R_A$ . Per tant, sabent que la càrrega d'un condensador mitjançant una xarxa RC segueix la llei

$$v(t) = v(\infty) - (v(\infty) - v(0))e^{-\frac{t}{RC}}$$

pel nostre cas concret tindrem

$$v_A(t) = v_A(\infty) - (v_A(\infty) - v_A(0))e^{-\frac{t}{R_A C_A}}$$

amb

$V_A(\infty) = V_{DD}$  (valor al que tendiria si el deixéssim carregar del tot)

$V_A(0) = V_{DD}/3$  (valor del que partim que està carregat)

Substituint

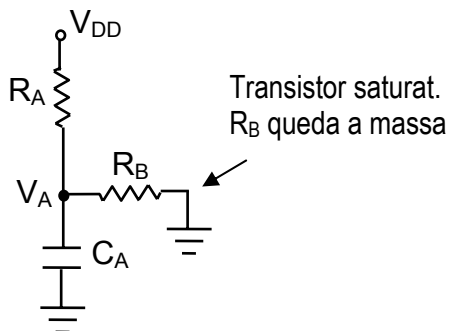
$$v_A(t) = V_{DD} - \left( V_{DD} - \frac{V_{DD}}{3} \right) e^{-\frac{t}{R_A C_A}} \rightarrow v_A(t) = V_{DD} - 2\frac{V_{DD}}{3} e^{-\frac{t}{R_A C_A}}$$

Al cap de  $t_H$  segons,  $v_A(t_H) = 2V_{DD}/3$ , llavors

$$v_A(t_H) = 2\frac{V_{DD}}{3} = V_{DD} - 2\frac{V_{DD}}{3} e^{-\frac{t}{R_A C_A}}, \text{ que aïllant dona}$$

$$t_H = R_A C_A \ln(2)$$

Descàrrega del condensador: Al estar el transistor saturat en aquesta situació, el circuit de descàrrega del condensador és lleugerament diferent a l'anterior



El condensador "veu" una resistència  $R_A || R_B$ , que es a través d'on es descarregarà. En aquest cas, seguint la mateixa llei de càrrega del condensador utilitzada anteriorment, s'ha de tenir present que ara

$$V_A(\infty) = \frac{V_{DD} R_B}{R_A + R_B} \text{ (valor al que tendiria si el deixéssim carregar del tot)}$$

$$V_A(0) = 2V_{DD}/3 \text{ (valor del que partim que està carregat)}$$

Substituint

$$v_A(t) = \frac{V_{DD} R_B}{R_A + R_B} - \left( \frac{V_{DD} R_B}{R_A + R_B} - 2\frac{V_{DD}}{3} \right) e^{-\frac{t}{R_A || R_B C_A}}$$

A l'instant  $t = t_L$ , tenim que  $V_A(t_L) = V_{DD}/3$ . Per tant

$$v_A(t_L) = \frac{V_{DD}}{3} = \frac{v_{DD}R_B}{R_A + R_B} - \left( \frac{v_{DD}R_B}{R_A + R_B} - 2\frac{v_{DD}}{3} \right) e^{-\frac{t_L}{R_A \parallel R_B C_A}}$$

I aïllant  $t_L$

$$\frac{1}{3} = \frac{R_B}{R_A + R_B} - \left( \frac{R_B}{R_A + R_B} - \frac{2}{3} \right) e^{-\frac{t_L}{R_A \parallel R_B C_A}} \rightarrow -t_L = (R_A \parallel R_B) C_A \ln \left( \frac{2R_B - R_A}{R_B - 2R_A} \right)$$

Finalment

$$t_L = (R_A \parallel R_B) C_A \ln \left( \frac{R_B - 2R_A}{2R_B - R_A} \right)$$

c) Per a que hi hagi commutació s'ha de complir que

$$\frac{v_{DD}R_B}{R_A + R_B} < \frac{V_{DD}}{3}$$

per tant  $3R_B < R_A + R_B \rightarrow \boxed{2R_B < R_A} \leftarrow \text{Condicció per a que oscil·li}$

Amb les expressions trobades, el cicle de treball serà

$$D = \frac{t_H}{t_H + t_L} = \frac{R_A C_A \ln(2)}{R_A C_A \ln(2) + (R_A \parallel R_B) C_A \ln \left( \frac{R_B - 2R_A}{2R_B - R_A} \right)}$$

Si es pren  $R_A \gg R_B$

$$D = \frac{t_H}{t_H + t_L} \approx \frac{R_A}{R_A + R_B} \approx 1 \rightarrow 100\%$$

d) Amb les dades que ens donen ens estan dient que

$$\left. \begin{aligned} f = \frac{1}{T} = \frac{1}{t_H + t_L} = 0.666 \rightarrow T = t_H + t_L = \frac{1}{0.666} = 1.5 \text{ seg.} \\ D = \frac{t_H}{t_H + t_L} = 0.5 \end{aligned} \right\} D = \frac{t_H}{1.5} = 0.5 \rightarrow t_H = 0.75 \text{ seg}$$

Si  $C_A = 47 \mu F$ , i abans hem trobat que  $t_H = R_A C_A \ln(2)$ ,

$$R_A = \frac{t_H}{C_A \ln(2)} \approx 23K$$