

ÍNDIX

1. La transformada de Laplace.....	2
2. Funció de transferència i resposta en freqüència d'un sistema lineal.....	9
3. Diagrames de Bode.....	13
4. Bibliografia.....	20

1 LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

1.1.- INTRODUCCIÓ

A la figura 1 es mostra un circuit passa baixa, circuit que ve caracteritzat pel sistema d'equacions següent:

$$\begin{aligned} e_i(t) &= R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt \\ e_o(t) &= \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt \end{aligned} \tag{1.1}$$

que com podem veure, és un sistema d'equacions diferencials que es pot solucionar utilitzant mètodes clàssics, o bé el mètode de la transformada de Laplace.

El mètode de la transformada de Laplace és un mètode operacional que pot utilitzar-se per a la resolució d'equacions diferencials lineals, de manera que moltes de les funcions habituals, com són funcions sinusoidals, sinusoidals esmorteïdes i exponencials, poden ser convertides en funcions algebraïques d'una variable complexa. Així mateix, operacions com la diferenciació i la integració poden ser reemplaçades per operacions algebraïques en el pla complex.

D'aquesta manera, una equació diferencial lineal es pot transformar en una equació algebraica amb variables complexes, essent possible manipular-la mitjançant regles algebraïques simples, a fi d'obtenir la solució en el pla complex. La solució final s'obindrà agafant la transformada inversa de Laplace, amb la particularitat de que la solució de l'equació homogènia i la solució particular s'obtenen en una sola operació.

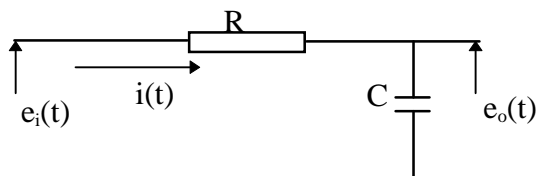


Figura 1.1: Circuit passa baixa

1.2.- LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Donada la funció real $f(t)$ que compleix la condició

$$\int_0^{\infty} |f(t) \cdot e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (1.2)$$

per a alguna σ real finita, la transformada de Laplace de $f(t)$ es defineix com:

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt \quad (1.3)$$

on la variable s , anomenada operador de Laplace, és una variable complexa amb un component real σ i una component imaginària $j\omega$, de manera que $s = \sigma + j\omega$.

Exemple 1.1

Sigui la funció exponencial definida com a

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 && \text{per a } t < 0 \\ f(t) &= A \cdot e^{-\alpha t} && \text{per a } t \geq 0 \end{aligned}$$

on A i α son constants reals.

La transformada de Laplace s'obindrà de la manera següent:

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} A \cdot e^{-\alpha t} \cdot e^{-st} \cdot dt = A \cdot \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+s)t} \cdot dt = \frac{A}{s + \alpha}$$

on podem veure que la funció exponencial produeix un pol en el pla complex.

Exemple 1.2

Sigui $f(t)$ una funció esgló unitari definida com

$$f(t) \begin{cases} u_s(t) = 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

La transformada de Laplace de $f(t)$ s'obindrà de la manera següent:

$$F(s) = L[u_s(t)] = \int_0^{\infty} u_s(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

A la taula següent es mostra un resum de les transformades més usuals, que poden trobar-se aplicant el procediment anterior a cadascuna de les respectives funcions temporals.

Nom	Funció temporal f(t)	Transformada de Laplace F(s)
Impuls unitari	$\delta(t)$	1
Esglaió unitari	u(t)	1/s
Rampa unitària	t	1/s ²
Rampa d'ordre n	t ⁿ	n!/s ⁿ⁺¹
Exponencial	e ^{-αt}	1/(s+a)
Sinus	sin ωt	ω/(s ² +ω ²)
Cosinus	cos ωt	s/(s ² +ω ²)
Sinus esmorteït	e ^{-αt} · sin ωt	ω/((s+a)+ ω ²)
Cosinus esmorteït	e ^{-αt} · cos ωt	(s+a)/((s+a)+ ω ²)

Taula 1.1: Transformades de Laplace

1.3.-TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

El procés matemàtic de passar de l'expressió en variable complexa a l'expressió en funció del temps, rep el nom de transformada inversa de Laplace, utilitzant l'anotació L⁻¹ per a la seva representació, de manera que:

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) \quad (1.4)$$

Matemàticament, s'obté f(t) de F(s) a partir de la següent expressió:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) \cdot e^{st} \cdot dt \quad (t>0) \quad (1.5)$$

on c és una constant real escollida més gran que les parts reals de tots els punts singulars de F(s).

Realitzar la integració donada per l'expressió anterior sembla complicat, però existeixen procediments més simples per trobar f(t), com pot ser la utilització d'una taula de transformades de Laplace, i si és necessari, desenvolupar la funció F(s) en fraccions simples, de manera que aquesta queda expressada en termes de funcions de s simples per a les quals es coneixen les transformades inverses.

És a dir, si es desenvolupa F(s) en fraccions simples, $F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_n(s)$, es compleix que:

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}[F_1(s)] + L^{-1}[F_2(s)] + \dots + L^{-1}[F_n(s)] = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t) \quad (1.6)$$

on f₁(t), f₂(t), ..., f_n(t) són les transformades inverses de F₁(s), F₂(s), ..., F_n(s) respectivament.

1.4.- TEOREMES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

A continuació es presentaran, en forma de teoremes, algunes de les propietats més importants de la transformada de Laplace, i que en molts de casos poden simplificar les aplicacions d'aquesta.

- *Multiplicació per una constant:* Sigui k una constant i $F(s)$ la transformada de Laplace de $f(t)$, aleshores:

$$L[kf(t)] = kF(s) \quad (1.7)$$

- *Suma i resta:* Siguin $F_1(s)$ i $F_2(s)$ les transformades de Laplace de $f_1(t)$ i $f_2(t)$, respectivament, aleshores:

$$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s) \quad (1.8)$$

- *Diferenciació i integració:* Sigui $F(s)$ la transformada de Laplace de $f(t)$ i $f(0)$ el límit de $f(t)$ quan t tendeix a 0; aleshores:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0) \quad (1.9)$$

$$L\left[\int f(t) \cdot dt\right] = \frac{F(s)}{s} \quad (1.10)$$

- *Translació en el temps:* La transformada de Laplace de $f(t)$ retrasada un temps T és igual a la transformada de Laplace de $f(t)$ multiplicada per e^{-Ts} ; és a dir:

$$L[f(t - T)u_s(t - T)] = e^{-Ts}F(s) \quad (1.11)$$

- *Teoremes del valor inicial i del valor final:* Si la transformada de Laplace de $f(t)$ és $F(s)$, aleshores:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (1.12)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (1.13)$$

- *Translació complexa:*

$$L[e^{\pm \alpha t} f(t)] = F(s \pm \alpha) \quad (1.14)$$

- *Convolució real (multiplicació complexa):* Siguin $F_1(s)$ i $F_2(s)$ les transformades de Laplace de $f_1(t)$ i $f_2(t)$ respectivament, i que $f_1(t)=0$, $f_2(t)=0$, per a $t < 0$; aleshores:

$$F_1(s)F_2(s) = L[f_1(t)*f_2(t)] = L\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau\right] = L\left[\int_0^t f_2(\tau)f_1(t - \tau)d\tau\right] \quad (1.15)$$

Exemples de transformada i transformada inversa de Laplace.

Exemple 1.- Trobar la transformada de Laplace de

$$v(t) = e^{-2t} + \cos(2t) - \sin(2t)$$

Aplicant les propietats :

$$L|v(t)| = L|e^{-2t}| + L|\cos 2t| - L|\sin 2t|$$

Per tant, fent la transformada de cada terme obtenim:

$$L|v(t)| = F(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{s}{s^2+4} - \frac{2}{s^2+4} = \frac{2s^2}{(2+s)(s^2+4)}$$

Exemple 2.: Trobar la transformada inversa de la següent transformada de Laplace:

$$F(s) = \frac{2(s+3)}{s(s+1)(s+2)}$$

Hem de trobat la transformada inversa o $f(t)$. Generalment en aquests casos es descompassa en fraccions simples del tipus:

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+2)}$$

A on:

$$A = F(s) \cdot s \Big|_{s=0} = \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 3$$

$$B = F(s)(s+1) \Big|_{s=-1} = \frac{2(s+3)}{s(s+2)} \Big|_{s=-1} = \frac{2 \cdot 2}{-1 \cdot 1} = -4$$

$$C = F(s)(s+2) \Big|_{s=-2} = \frac{2(s+3)}{s(s+1)} \Big|_{s=-2} = \frac{2 \cdot 1}{-2 \cdot -1} = 1$$

Així podem fer:

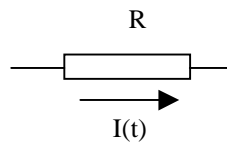
$$v(t) = L^{-1} \left[\frac{3}{s} - \frac{4}{s+2} + \frac{1}{s+2} \right] = 3 \cdot u(t) - 4 \cdot e^{-t} \cdot u(t) + e^{-2t} \cdot u(t)$$

Finalment tenim:

$$v(t) = [3 - 4 \cdot e^{-t} + e^{-2t}] u(t)$$

Transformació complexa dels component simples

A efectes pràctics, sabem que si tenim una resistència de valor R i que li travessa una intensitat $i(t)$:



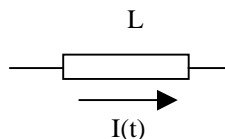
Tenim que $e(t)$ és la tensió que cau en els terminals del component):

$$e(t) = i(t) \cdot R$$

Efectuant la transformada de Laplace:

$$L|e(t)| = I(s) \cdot R$$

En el cas de una bobina:



Tenim que:

$$e(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Si efectuem la transformada de Laplace tenim que:

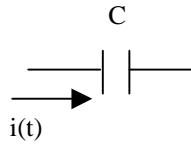
$$L|e(t)| = L \cdot s \cdot I(s) - L \cdot i(0)$$

Si considerem condicions inicials igual a zero ($i(0) = 0$), tenim que:

$$L|e(t)| = F(s) = L \cdot s \cdot I(s)$$

És a dir, que s'ha transformat amb una impedància complexa de valor $(L \cdot s)$

Per al condensador, si partim del següent circuit:



Tenim que:

$$i(t) = C \frac{dE}{dt}$$

Efectuant la transformada, si tenim condicions inicials zero ($e(0) = 0$):

$$L|i(t)| = I(s) = C \cdot s \cdot E(s) - C \cdot e(0) \Rightarrow E(s) = \frac{1}{C \cdot s} \cdot I(s)$$

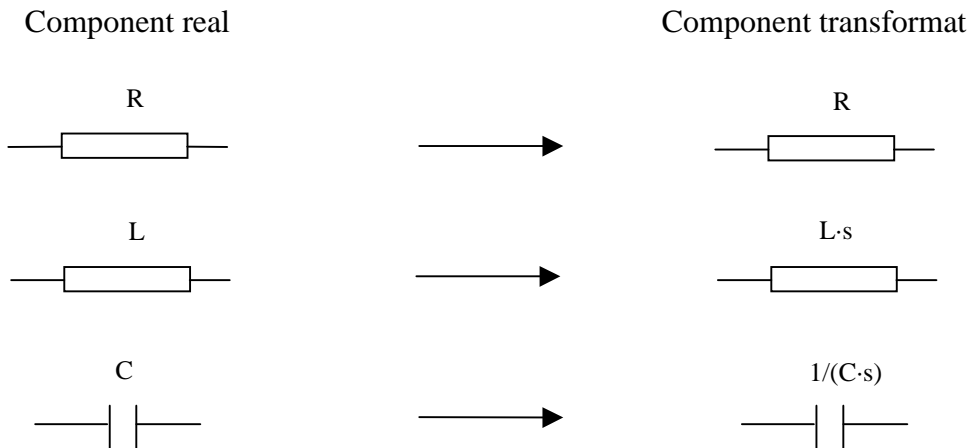
És a dir, que hem transformat el condensador amb una impedància de valor $1/(C \cdot s)$.

Així tenim que:

Resistència de valor $R \rightarrow$ es transforma en una impedància complexa de valor: R

Inductància de valor $L \rightarrow$ es transforma en una impedància complexa de valor: $L \cdot s$

Capacitat de valor $C \rightarrow$ es transforma en una impedància complexa de valor: $1/(C \cdot s)$.



1.5.- APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Suposem el circuit passa baixa, estudiat a l'apartat 1.1, on hem obtingut el següent sistema d'equacions diferencials,

$$\begin{aligned} e_i(t) &= R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt \\ e_o(t) &= \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt \end{aligned} \quad (1.1)$$

Si apliquem el mètode de la transformada de Laplace, suposant unes condicions inicials igual a zero, podem escriure (veure la taula 1.1, de transformades de Laplace):

$$\begin{aligned} E_i(s) &= R \cdot I(s) + \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{s} \cdot I(s) \\ E_o(s) &= \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{s} \cdot I(s) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Fixem-nos que podem obtenir el mateix resultat simplement aplicant les transformacions que hem anomenat en el apartat: “transformació complexa dels components simples” substituint en el circuit els valors reals dels component pels seus valors complexes.

de manera que obtindrem, operant adequadament, que la transformada de la sortida es pot trobar a partir de l'expressió:

$$E_o(s) = \frac{1}{1 + RCs} \cdot E_i(s) \quad (1.17)$$

Si suposem que el senyal d'entrada $e_i(t)$, és un esglaió unitari de la forma:

$$\begin{aligned} e_i(t) &= u(t) = 1 \text{ per a } t > 0 \\ e_i(t) &= 0 \text{ per a } t < 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

la seva transformada valdrà (veure taula 1.1):

$$E_i(s) = \frac{1}{s} \quad (1.19)$$

i per tant, la transformada de la sortida val:

$$E_0(s) = \frac{1}{1+RCs} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(1+RCs)} \quad (1.20)$$

de manera que podem trobar la sortida $e_0(t)$ fent la transformada inversa de $E_0(s)$ (suposant les condicions inicials iguals a zero):

$$e_0(t) = \left(1 - e^{-t/RC}\right) \quad (1.21)$$

(s'ha eliminat $u(t)$).

transformada inversa que a primera vista no sembla immediata, però que es pot trobar a partir de les taules de transformades i aplicant correctament les propietats de la transformada de Laplace.

A la figura 1.2 es representa la resposta del sistema, obtinguda a partir de l'expressió 1.21, i suposant un valor $RC=0.01s$.

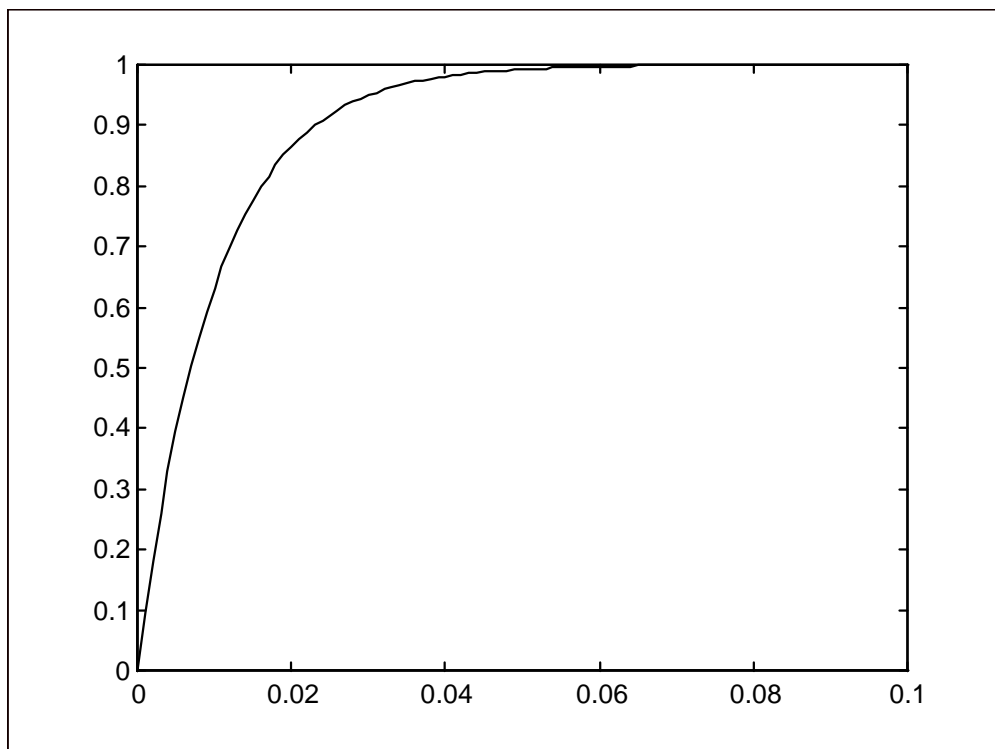


Figura 1.2: Resposta del circuit passa baixa a una entrada en esglaió.

2 FUNCIÓ DE TRANSFERÈNCIA I RESPOSTA EN FREQUÈNCIA D'UN SISTEMA LINEAL

2.1.- FUNCIÓ DE TRANSFERÈNCIA D'UN SISTEMA

Si considerem el sistema lineal invariant en el temps de la figura 2.1, amb una entrada $e_i(t)$ i una sortida $e_o(t)$,



Figura 2.1

aquest sistema vindrà generalment caracteritzat per un sistema d'equacions diferencials, on podem aplicar la transformada de Laplace, tal com s'ha explicat en el capítol 1.

Però per altra banda, aquest sistema també es pot caracteritzar per la seva funció de transferència, definida com la transformada de Laplace de la resposta al impuls¹ $g(t)$ del sistema, amb totes les condicions inicials a zero.

Així, si indiquem com $G(s)$ a aquesta funció de transferència, podem escriure :

$$G(s) = L[g(t)] \quad (2.1)$$

funció que se relacionarà amb les transformades de l'entrada i la sortida del sistema mitjançant la relació

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} \quad (2.2)$$

on $E_o(s)$ i $E_i(s)$ són, respectivament, les transformades de la sortida $e_o(t)$ i de l'entrada $e_i(t)$ del sistema, de manera que, si coneixem la funció de transferència del sistema i la transformada del senyal d'entrada, podem obtenir la transformada de la sortida a partir de l'expressió:

$$E_o(s) = G(s) \cdot E_i(s) \quad (2.3)$$

i per tant, el sistema es pot representar de la forma següent:

¹ La resposta a l'impuls d'un sistema es defineix com la sortida d'aquest quan a la entrada s'hi aplica un impuls unitari $\delta(t)$

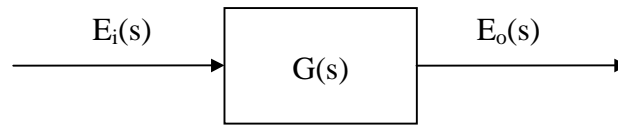


Figura 2.2

Si bé la funció de transferència d'un sistema lineal es defineix en termes de la resposta a l'impuls, a la pràctica, aquesta funció es pot obtenir directament de les equacions diferencials que caracteritzen al sistema, a partir d'on s'efectuaren les transformades de Laplace corresponents, i s'obindrà una expressió general de la forma:

$$G(s) = k \frac{(s + z_1) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1) \cdots (s + p_m)} \quad (2.4)$$

Detall:

En aquest cas tenim que la funció de transferència correspon al guany de tensó, ja que fem:

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)}$$

i que és el més comú.

Altres paràmetres que es poden trobar són el guany de corrent:

$$G(s) = \frac{I_o(s)}{I_i(s)}$$

Impedància d'entrada:

$$G(s) = \frac{V_i(s)}{I_i(s)}$$

o impedància de sortida:

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{I_o(s)}$$

Els punts en que la funció tendeix a infinit es denominen pols (quan fan denominador zero o $s = -p_1, \dots, s = -p_m$) mentre que els punts en que la funció de transferència s'igualava zero, reben el nom de zeros (numerador zero o $s = -z_1, \dots, s = -z_m$).

Exemple 2.1

Si considerem el circuit RC de la figura 1.1, podem trobar la seva funció de transferència a partir de l'expressió 1.17:

$$E_o(s) = \frac{1}{1+RCs} \cdot E_i(s) \quad (1.17)$$

de manera que:

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{1+RCs} \quad (2.5)$$

funció que presenta un pol a $s = (-1/RC)$.

2.2.- RESPOSTA EN FREQUÈNCIA

S'entén per resposta en freqüència a la resposta en regim permanent d'un sistema lineal davant una entrada sinusoidal. Així, el mètode més convencional de trobar la resposta d'un sistema seria variar, en un cert rang, la freqüència del senyal d'entrada i estudiar la resposta del sistema

Però si tenim en compte els conceptes desenvolupats en els apartats anteriors, si sobre un sistema hi apliquem una entrada $x(t)$ sinusoidal de la forma:

$$x(t) = K \cdot \sin \omega t \quad (2.6)$$

sabem que aquest respondrà amb una sortida $y(t)$, i que la transformada de Laplace d'aquesta sortida, $Y(s)$, es pot trobar a partir de l'expressió 2.3, és a dir:

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) \quad (2.7)$$

on $X(s)$ i $Y(s)$ seran, respectivament, les transformades de l'entrada $x(t)$ i de la sortida $y(t)$.

A la vegada, i a partir de la taula 1.1, sabem que la transformada d'una sinusoide val:

$$X(s) = \frac{K \cdot \omega}{s^2 + \omega^2} \quad (2.8)$$

de manera que la transformada de la sortida vindrà donada per l'expressió:

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{K \cdot \omega}{s^2 + \omega^2} \quad (2.9)$$

d'on podem obtenir la sortida $y(t)$ fent l' antitransformada de $Y(s)$.

Però si suposem que el nostre sistema és lineal i invariant en el temps, al aplicar a la seva entrada un senyal sinusoidal, $x(t)$, es demostra que, al arribar a l'estat de règim permanent, aquest presenta una sortida sinusoidal $y(t)$, de la mateixa freqüència que l'entrada, però, en general, d'amplitud i fase diferents a la de l'entrada:

$$y(t) = Y \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (2.10)$$

A la vegada, es demostra també, que en un sistema del tipus descrit anteriorment, podem reemplaçar, en les seves transformades de Laplace, s per $j\omega$, de manera que l'expressió de la funció de transferència $G(s)$ queda de la forma:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \quad (2.10)$$

Amb això, es dedueix que l'amplitud (Y) i el angle de desfasament (ϕ), de la funció de sortida $y(t)$, es poden trobar a partir de:

$$\begin{aligned} Y &= K \cdot |G(j\omega)| \\ \Phi &= [G(j\omega)] \end{aligned} \quad (2.11)$$

on $|G(j\omega)|$ i $[G(j\omega)]$ són, respectivament, el mòdul i l'argument de la funció de transferència $G(j\omega)$.

Exemple 2.2

Si considerem el circuit RC de la figura 1.1, que com s'ha vist presenta una funció de transferència:

$$G(s) = \frac{1}{1 + RCs} \quad (2.5)$$

i volem trobar la seva resposta en freqüència, haurem de fer el producte d'aquesta funció de transferència amb la transformada de Laplace de la funció sinusoïdal (expressió 2.8), de manera que ens queda que la transformada de la sortida val:

$$Y(s) = \frac{1}{1 + RCs} \cdot \frac{K \cdot \omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{K \cdot \omega}{RCs^3 + s^2 + RC\omega^2 s + \omega^2} \quad (2.12)$$

Però, atès que sistema és lineal i invariant en el temps, al arribar a l'estat de règim permanent, aquest presentarà una sortida sinusoïdal $y(t)$, de la mateixa freqüència que l'entrada, però d'amplitud i fase diferents:

$$y(t) = Y \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (2.10)$$

on l'amplitud (Y) i el angle de desfasament (ϕ), es poden trobar a partir de:

$$\begin{aligned} Y &= K \cdot |G(j\omega)| \\ \Phi &= [G(j\omega)] \end{aligned} \quad (2.11)$$

i atès que en el nostre cas, la funció de transferència expressada en forma de $j\omega$ queda com:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (2.13)$$

el seu mòdul i el seu argument valdran:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \quad (2.14)$$

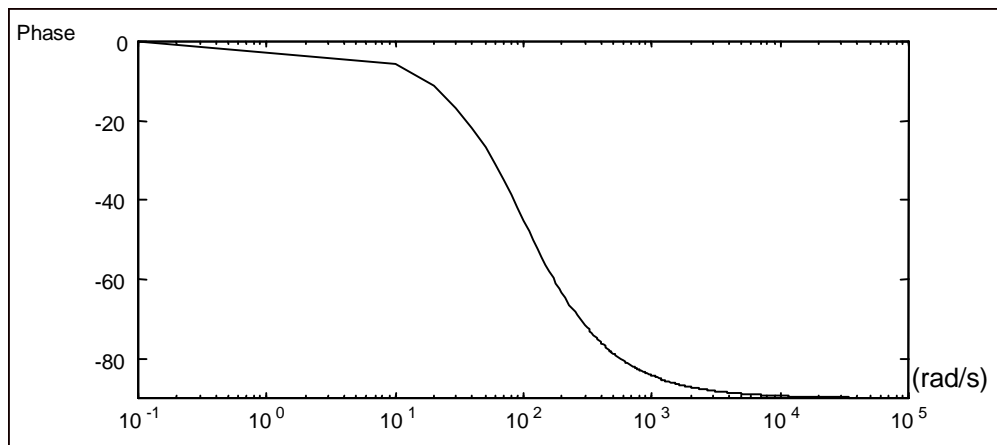
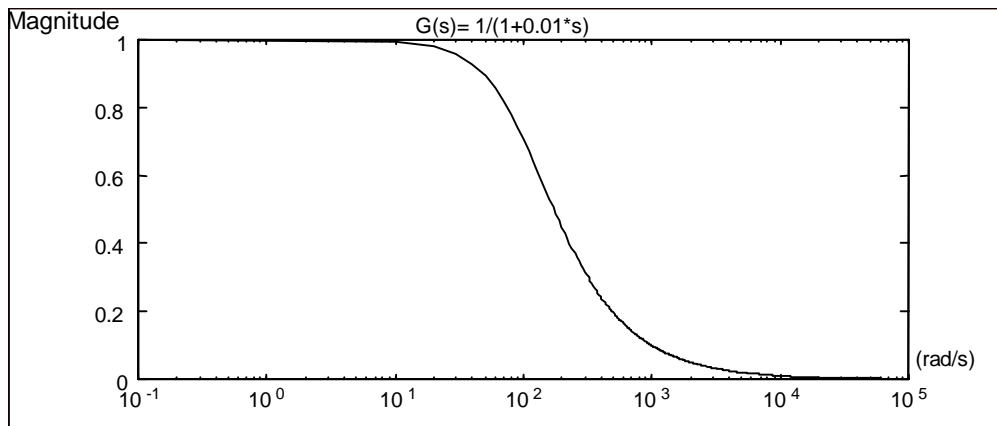
$$[G(j\omega)] = -\arctan(RC\omega) \quad (2.15)$$

de manera que finalment podem afirmar que, davant d'una entrada sinusoidal $x(t)=K \cdot \sin \omega t$, el sistema estudiat respondrà amb una sortida temporal de la forma:

$$y(t) = \frac{K}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad \text{on} \quad \phi = -\arctan(RC\omega) \quad (2.16)$$

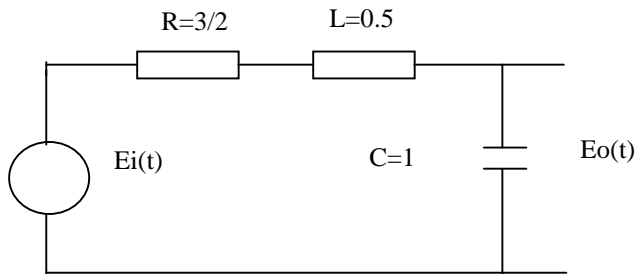
Com podem deduir de les expressions anteriors, per ω baixes, el guany del circuit és aproximadament 1, i va disminuint a mida que augmenta ω (com correspon a un filtre passa-baixa). En quant a l'angle de desfasament, per ω baixes aquest és petit i augmenta a mida que també augmenta ω , tendint a -90° quan ω tendeix a infinit.

Acabem de fer un estudi de resposta en freqüència, que si el volem representar gràficament, podríem anar donant valors a ω i trobar els valors corresponents al guany i al desfasament. A la figura següent, es mostra una representació gràfica per uns valors de $R=10K$ i $C=1\mu F$ ($RC=0.01s$).

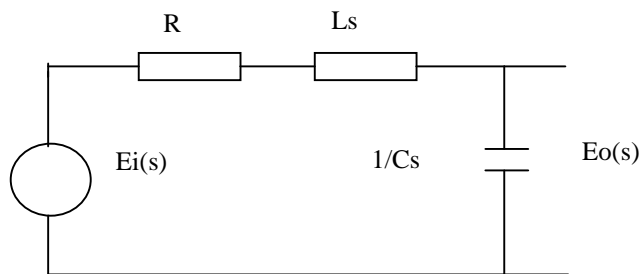


Exemple 2.3

Considerem el següent circuit:



El circuit transformat és:



Si trobem la tensió de sortida mitjançant el simple càlcul del divisor de tensió tenim que:

$$Eo(s) = \frac{\frac{1}{Cs} Ei(s)}{R + Ls + \frac{1}{Cs}}$$

Podem fer:

$$H(s) = \frac{Eo(s)}{Ei(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + Ls + \frac{1}{Cs}}$$

Si utilitzem els valors corresponents tenim que:

$$H(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} = H(j\omega)$$

(fent $s = j\omega$).

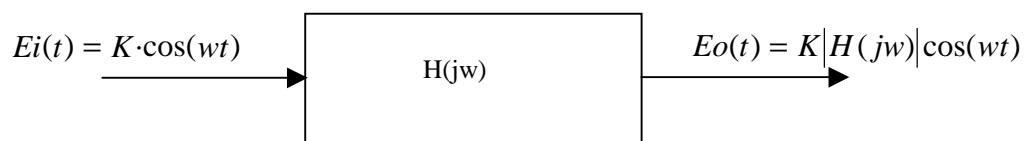
Si tenim a la entrada:

$$Ei(t) = K \cdot \cos(\omega t) = \cos(2t) \Rightarrow \omega = 2; K = 1$$

Si fem $s=j\omega$ tenim que $\omega = 2$, podem trobar el guany per $\omega = 2$. Farem:

$$H(j2) = \frac{2}{-4 + 2 + 6j} = \frac{2}{-2 + 6j} = \frac{1}{-1 + 3j} = 0,32_{-108^\circ}$$

Sabem que en un sistema:



Per tant, podem trobar, en modus estacionari, que la resposta a la sortida serà:

$$Eo(t) = 0.32 \cos(2t - 108^\circ)$$

És a dir, mitjançant la transformada de Laplace podem trobar la sortida d'un sistema a qualsevol freqüència donada de forma simple.

3 DIAGRAMES DE BODE

3.1.- INTRODUCCIÓ

Un diagrama de Bode (o diagrama logarítmic) consisteix en una aproximació asimptòtica de les corbes reals de la magnitud i de la fase d'una funció de transferència $G(j\omega)$, una vegada coneguts els seus pols i els seus zeros. Aquest mètode, desenvolupat per H. Bode, permet, mitjançant una tècnica senzilla, fer un estudi aproximat de la resposta en freqüència d'un sistema, aproximació generalment suficient per la majoria dels casos.

La seva representació gràfica està basada en un diagrama logarítmic amb dos traçats, mòdul i angle de fase, en front de la freqüència, també en escala logarítmica. L'avantatge principal d'utilitzar escales logarítmiques, és el poder convertir la multiplicació d'amplituds en una suma. Generalment, el mòdul de l'amplitud es representa en decibels (dB), és a dir $20 \log_{10} |G(j\omega)|$.

3.2.- FACTORS BÀSICS

Si tenim una funció de transferència arbitrària, els factors bàsics que normalment es produeixen són:

- 1.- Guany K
- 2.- Factors integrals $(j\omega)^{-1}$ i derivatius $(j\omega)$
- 3.- Factors de primer ordre:

$$\text{zeros: } (1+j\omega T) \tag{3.1}$$

$$\text{pols: } (1+j\omega T)^{-1}$$

4.- Factors de segon ordre o quadràtics:

$$\text{zeros: } 1 + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 \quad (3.2)$$

$$\text{pols: } \frac{1}{1 + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Atès que sumar logaritmes de guanys correspon a multiplicar-los entre si; si coneixem els diagrames logarítmics d'aquests factors bàsics, serà possible utilitzar-los per traçar el diagrama d'una funció de transferència arbitrària, simplement sumant gràficament les corbes individuals.

3.2.1-Guany K

La representació de l'amplitud, per un guany constant K, és una línia recta horitzontal de valor $20 \cdot \log K$, independentment de la pulsació ω . L'angle de fase del guany K és zero.

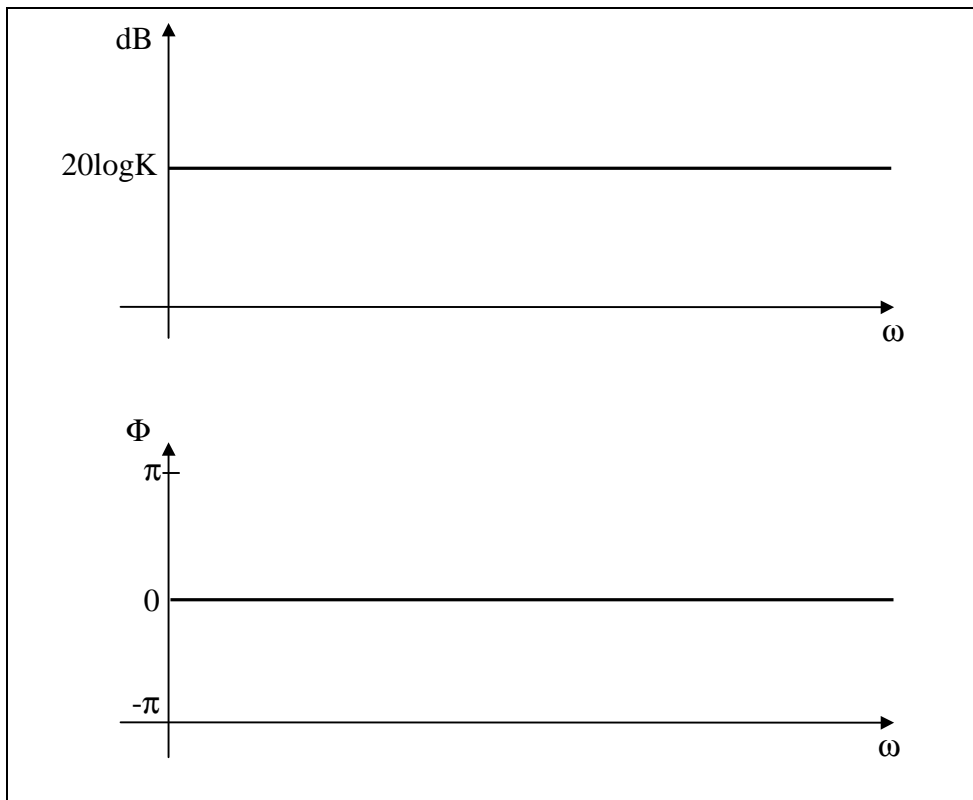


Figura 3.1

Cal remarcar que per guanys més grans d'1 ($K > 1$), el valor de l'amplitud en decibels és positiu, mentre que per guanys més petits d'1 ($K < 1$), el seu valor en decibels és negatiu.

3.2.2.- Factors integrals i derivatius $(j\omega)^{\pm 1}$

Per un factor integral $(j\omega)^{-1}$, l'amplitud corresponent en decibels serà:

$$20\log |(j\omega)^{-1}| = -20\log\omega \tag{3.3}$$

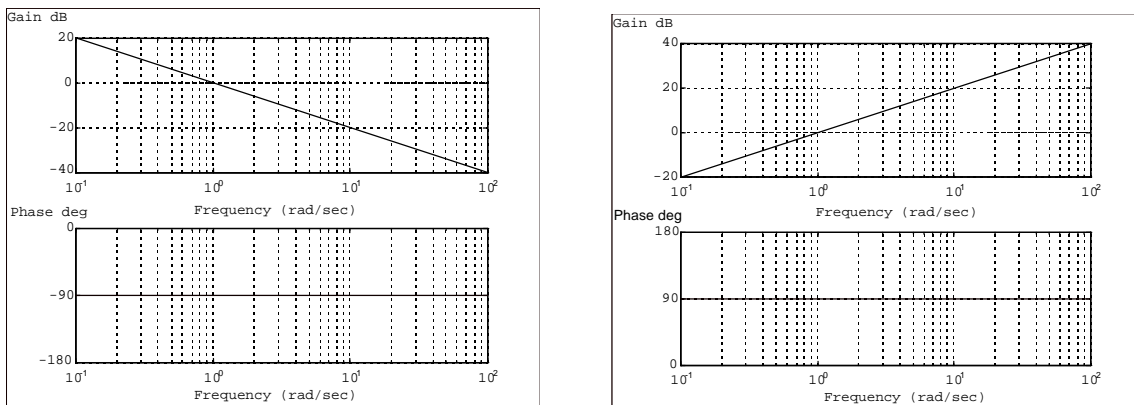
és a dir, una recta amb un pendent de -20dB/dècada (Una dècada és la banda de freqüències entre ω_1 i $10\omega_1$). Com podem observar, l'angle de fase és una constant, igual a -90° ($-\pi/2$ radians).

Per un factor derivatiu $(j\omega)$, l'amplitud corresponent en decibels serà:

$$20\log |j\omega| = 20\log\omega$$

és a dir, una recta de pendent positiu de 20dB/dècada. De manera similar al cas anterior, l'angle de fase és una constant, però en aquest cas igual a 90° ($\pi/2$ radians).

Per dibuixar els diagrames corresponents, podem veure que en els dos casos la recta està completament definida, ja que podem conèixer un punt (p.e., per $\omega=1$ l'amplitud és 0dB), i el pendent (20 dB/dècada, negatiu o positiu, en funció de ser un factor integral o derivatiu).



Factor integral

Factor derivatiu

Figura 3.2

En el cas de tenir funcions de transferència de la forma $(j\omega)^{-n}$ o $(j\omega)^n$ el procediment serà similar:

$$20\log |(j\omega)^{-n}| = -n \cdot 20\log |j\omega| = -20 \cdot n \cdot \log\omega \text{ Db} \tag{3.4}$$

$$20\log |(j\omega)^n| = n \cdot 20\log |j\omega| = 20 \cdot n \cdot \log\omega \text{ dB}$$

Com podem veure, els pendents de les rectes venen multiplicats per n (-20n dB/dècada o 20n dB/dècada), a l'igual que l'angle de fase ($-n\pi/2$ o $n\pi/2$).

3.2.3- Factors de primer ordre $(1+j\omega T)^{\pm 1}$

Si considerem un pol de la forma $1/(1+j\omega T)$, podem veure que el logaritme de l'amplitud és:

$$20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = -20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2} \quad (3.5)$$

D'aquesta expressió podem deduir que per baixes freqüències, $\omega \ll 1/T$:

$$\omega \ll 1/T \quad \rightarrow \quad -20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2} = -20\log 1 = 0 \text{ dB} \quad (3.6)$$

mentre, que per freqüències altes, $\omega \gg 1/T$:

$$\omega \gg 1/T \quad \rightarrow \quad -20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2} = -20\log\omega T \text{ dB}$$

Així, podem dir que la corba de l'amplitud, expressada en decibels, és, per a baixes freqüències una línia constant de 0 dB, en canvi, per freqüències altes és una recta amb un pendent de -20 dB/dècada ($-20\log\omega T$). En el punt $\omega=1/T$ aquesta última recta ens dona un valor de l'amplitud igual a 0 dB, i per tant coincideix amb la recta de baixes freqüències. D'aquesta manera la representació de la corba de resposta de freqüències d'un factor $1/(1+j\omega T)$ pot ser aproximada per dues línies rectes asimptotes, una a 0 dB per el rang de freqüències $0 < \omega < 1/T$, i l'altre per una línia recta de pendent -20db/dècada per el rang $1/T < \omega < \infty$. A la figura 3.3 es mostra la corba exacta de l'amplitud, les asimptotes i la corba exacta de l'angle de fase.

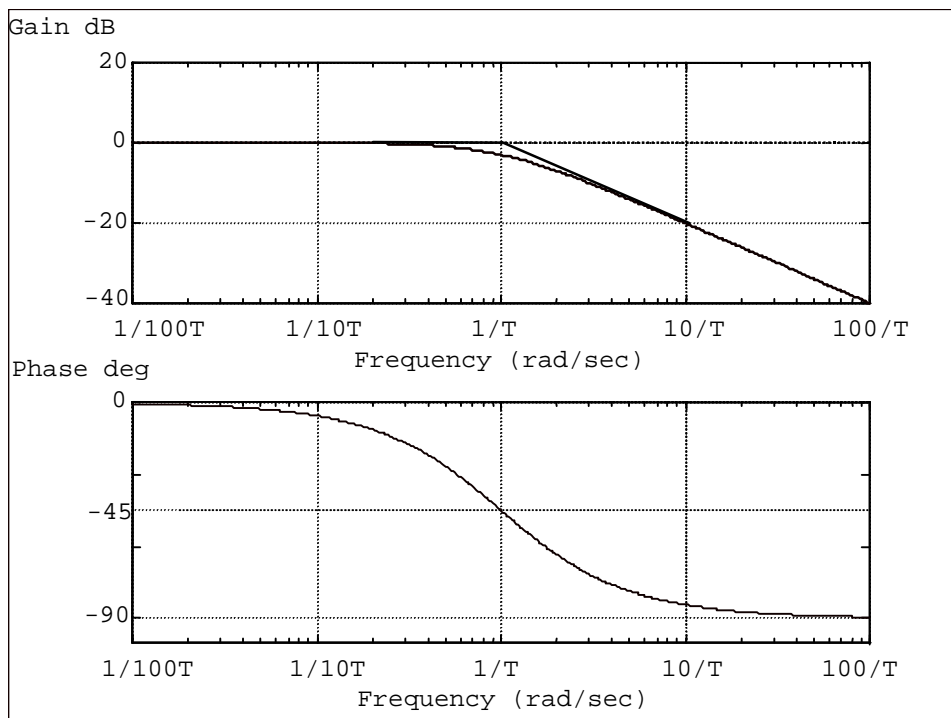


Figura 3.3

La freqüència a la que es troben les dues rectes rep el nom de freqüència de transició o de tall. Es pot demostrar que a aquesta freqüència es on es produeix l'error màxim, motivat per l'aproximació asimptòtica de la resposta en freqüència, i és igual a -3dB:

$$\omega=1/T \quad \rightarrow \quad -20\log\sqrt{1+\omega^2T^2} = -20\log\sqrt{2} \approx -3 \text{ dB}$$

L'angle de fase exacte d'un pol ve donat per:

$$\phi = -\arctan(\omega T) \quad (3.7)$$

de manera que a la freqüència de tall:

$$\omega=1/T \quad \rightarrow \quad \phi = -\arctan(1) = -45^\circ \quad (-\pi/4)$$

També podem deduir que :

$$\begin{aligned} \omega \ll 1/T &\rightarrow \phi = 0^\circ \\ \omega \gg 1/T &\rightarrow \phi = -90^\circ \quad (-\pi/2) \end{aligned}$$

a més d'altres valors, p.e.: $\omega=1/(10T)$ $\phi = -5.7^\circ$, $\omega=1/T$ $\phi = -45^\circ$, $\omega=10/T$ $\phi = -84.3^\circ$.

Com podem observar de tot l'anterior, la resposta d'un factor de primer ordre de la forma $1/(1+j\omega T)$, presenta les característiques d'un filtre passa-baixa.

Si, per contra, tenim un zero $(1+j\omega T)$, la representació serà totalment recíproca, canviant únicament el signe. Així, la figura 3.4 mostra una representació gràfica d'un zero, on $T=0.1$.

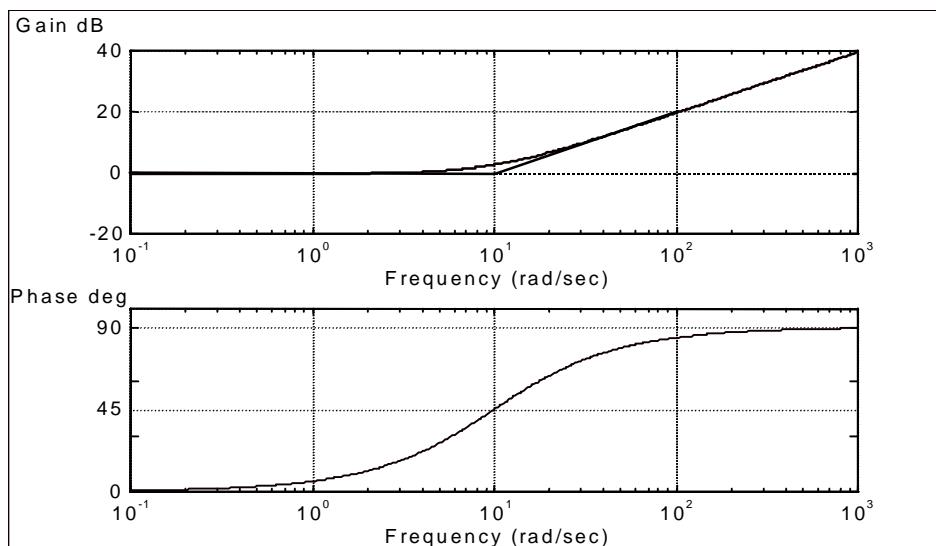


Figura 3.4

3.2.4.- Factors quadràtics.

Si suposem un pol de la forma

$$\frac{1}{1 + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (3.8)$$

podem veure que el logaritme de l'amplitud és:

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + 2\delta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2} \right| = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\delta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (3.9)$$

D'aquesta expressió podem deduir que per baixes freqüències, $\omega \ll \omega_n$:

$$\omega \ll \omega_n \quad \rightarrow \quad -20 \log 1 = 0 \text{ dB} \quad (3.10)$$

de manera que l'asíptota de baixa freqüència és una línia horitzontal a 0 dB. Per a freqüències altes, $\omega \gg \omega_n$, el logaritme de l'amplitud és:

$$\omega \gg \omega_n \quad \rightarrow \quad -20 \log(\omega^2/\omega_n^2) = -40 \log(\omega/\omega_n) \text{ dB}$$

i per tant, l'asíptota d'alta freqüència és una línia recta de pendent -40 dB/dècada. Aquesta asíptota talla a l'eix de baixes freqüències a $\omega = \omega_n$, ja que a aquesta freqüència

$$\omega = \omega_n \quad \rightarrow \quad -40 \log(\omega/\omega_n) = -40 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

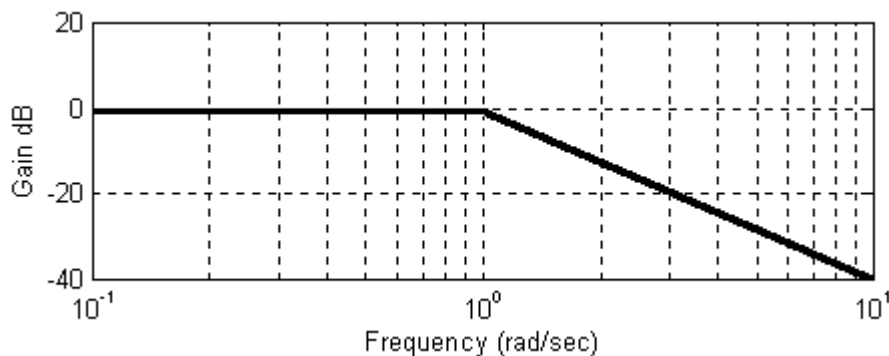


Figura 3.5

Les dues asímptotes que acabem de determinar són independents del valor del factor d'esmortiment δ . Però a prop de la freqüència $\omega=\omega_n$, es produeix un pic de ressonància d'una amplitud determinada pel valor de δ . L'error en l'aproximació amb línies asímptòtiques de la corba real depèn d'aquest valor de δ , essent més gran per valors petits de δ .

A la figura 3.6 es mostren les corbes exactes del logaritme de l'amplitud per a diferents valors de δ , en concret per $\delta= 0.1$ (resposta menys esmorteïda), 0.2, 0.3, 0.5, 0.7 i 1.0 (resposta més esmorteïda). A la vegada es mostren també les corbes exactes de l'angle de fase, corresponent la corba amb baixada menys pronunciada a $\delta= 0.1$ i la més pronunciada a $\delta= 1.0$.

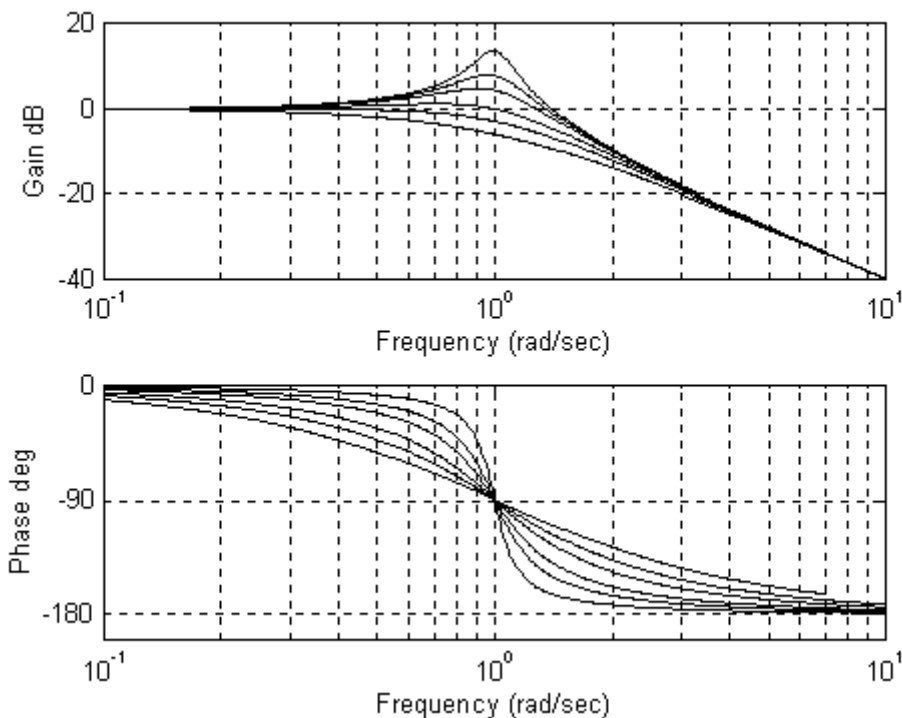


Figura 3.6

L'angle de fase del factor quadràtic és:

$$\phi = -\arctan \left[\frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right] \quad (3.11)$$

L'angle de fase és funció tant de ω com de δ . Per a $\omega=0$, l'angle de fase és igual a 0^0 . A la freqüència de transició $\omega=\omega_n$, l'angle de fase és -90^0 , independentment de δ . Finalment, per a $\omega=\infty$, l'angle de fase és de -180^0 .

4. BIBLIOGRAFIA

- Benjamin C. Kuo.
SISTEMAS DE CONTROL AUTOMÀTICO.
Prentice Hall International Editions.
1.996

- Katsuhiko Ogata.
INGENIERÍA DE CONTROL MODERNA.
Prentice Hall International Editions. 1998

- Ramón Pallás Areny.
SENSORES Y ACONDICIONADORES DE SEÑAL.
Marcombo-Boixareu Editores. 1994