ESTRUCTURA i TECNOLOGIA de COMPUTADORS

Transparències del Tema 2
Àlgebra de Boole

J. Freixenet, X. Cufí, J. Martí,
M. Fàbregas i J. Ferrer
Departament d'Electrònica,
Informàtica i Automàtica

ETC - Esquema del Tema 2:

Algebra de boole
- Definició de l'àlgebra: postulats i teoremes
- Funcions de variables lògiques
- Taules de veritat i portes lògiques
- Simplificació de funcions

ETC - Definició de l'Àlgebra de Boole

Una estructura algebraica consta de:

Un conjunt d'elements: *B*

Unes operacions binàries suma i producte: { +, • }

Una operació unària complementari: { ' }

Més una sèrie d'axiomes (postulats):

1. ***B* conté com a mínim dos elements *a, b* tal que *a* ≠ *b***

2. ***Tancament* essent *a,b* de *B:***
   i) $a + b$ pertany a B
   ii) $a \bullet b$ pertany a B

3. **Lleis *Commutatives*: essent *a,b* de *B:***
   i) $a + b = b + a$
   ii) $a \bullet b = b \bullet a$

4. ***Identitats*: essent 0, 1 de *B:***
   i) $a + 0 = a$
   ii) $a \bullet 1 = a$
   (Existeix element neutre de la suma i el producte)

5. **Lleis *Distributives*:**
   i) $a + (b \bullet c) = (a + b) \bullet (a + c)$
   ii) $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$

6. **Existeix el *Complementari*:**
   i) $a + a' = 1$
   ii) $a \bullet a' = 0$

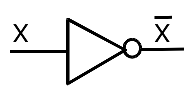
ETC - Definició de l'Àlgebra de Boole

$B = \{ 0,1 \}$, + = OR, • = AND, ' = NOT   és una Àlgebra de Boole, llavors

Axiomes:
0 + qualsevol_cosa = qualsevol_cosa
1 + qualsevol_cosa = 1
0 • qualsevol_cosa = 0
1 • qualsevol_cosa = qualsevol_cosa

Teorema: Qualsevol funció booleana pot ser expressada com una taula de veritat, i pot ser escrita com una expressió boolena utilitzant AND, OR i NOT

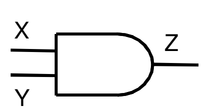
Descripció:
If X = 0 then X ' = 1
If X = 1 then X ' = 0



X	$\overline{X}$
0	1
1	0

NOT

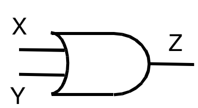
Descripció:
Z = 1 if X and Y are both 1



X	Y	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

AND

Descripció:
Z = 1 if X or Y (or both) are 1



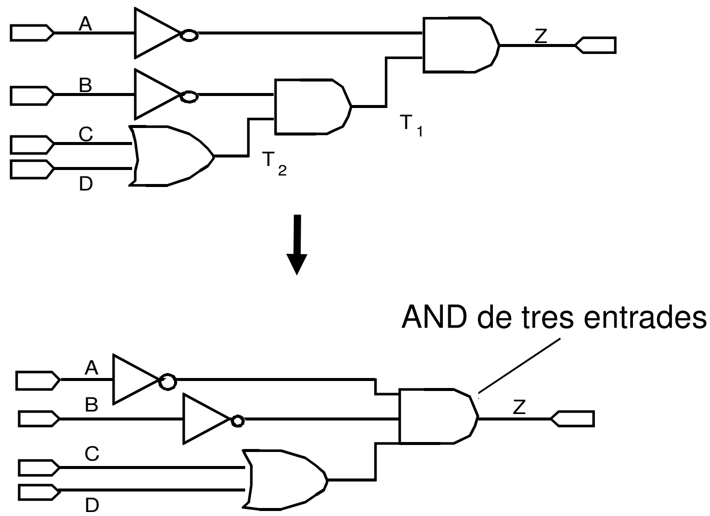
X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OR

ETC - Definició de l’Àlgebra de Boole

Més d’una manera d’implementar una funció amb portes

E.g., $Z = A' \bullet B' \bullet (C + D) = (A' \bullet \underbrace{(B' \bullet \overbrace{(C + D)}^{T2})}_{T1})$



ETC - Teoremes de l’Àlgebra de Boole

Dualitat: Qualsevol teorema o funció deduïble dels postulats continua essent vàlida si s’intercanvien totes les operacions AND per ORs, les ORs per ANDs, els 0s per 1s, i els 1s per 0s (no canvien les lletres, els identificadors de variables).

Ex: $X + X' = 1$ Si aplico el dual $X \bullet X' = 0$

<u>Teoremes de l'Àlgebra de Boole</u>:

Operacions amb 0 i 1:

1. $X + 0 = X$ **1D.** $X \bullet 1 = X$

2. $X + 1 = 1$ **2D.** $X \bullet 0 = 0$

Llei d’Idempotència:

3. $X + X = X$ **3D.** $X \bullet X = X$

Llei d’Involució:

4. $(X')' = X$

Lleis del Complementari:

5. $X + X' = 1$ **5D.** $X \bullet X' = 0$

Llei Commutativa:

6. $X + Y = Y + X$ **6D.** $X \bullet Y = Y \bullet X$

ETC - Teoremes de l'Àlgebra de Boole

Lleis Associatives:

7. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$
$= X + Y + Z$

7D. $(X \bullet Y) \bullet Z = X \bullet (Y \bullet Z)$
$= X \bullet Y \bullet Z$

Lleis Distributives:

8. $X \bullet (Y+ Z) = (X \bullet Y) + (X \bullet Z)$

8D. $X + (Y\bullet Z) = (X + Y) \bullet (X + Z)$

Simplificació de teoremes:

9. $X \bullet Y + X \bullet Y' = X$
10. $X + X \bullet Y = X$
11. $(X + Y') \bullet Y = X \bullet Y$

9D. $(X + Y) \bullet (X + Y') = X$
10D. $X \bullet (X + Y) = X$
11D. $(X \bullet Y') + Y = X + Y$

Llei de Morgan:

12. $(X + Y + Z + ...)' = X' \bullet Y' \bullet Z' \bullet ...$

12D. $(X \bullet Y \bullet Z \bullet ...)' = X' + Y' + Z' + ...$

ETC - Teoremes de l'Àlgebra de Boole

Demostració de teoremes via postulats i altres teoremes

Ex: Demostració del teorema $\mathbf{X \bullet Y + X \bullet Y' = X}$

Llei distributiva (8)	$X \bullet Y + X \bullet Y' = X \bullet (Y + Y')$
Llei del complementari (5)	$X \bullet (Y + Y') = X \bullet (1)$
Identitat (1D)	$X \bullet (1) = X$

Ex: Demostració del teorema $\mathbf{X + X \bullet Y = X}$

Identitat (1D)	$X + X \bullet Y = X \bullet 1 + X \bullet Y$
Llei distributiva (8)	$X \bullet 1 + X \bullet Y = X \bullet (1 + Y)$
Identitat (2)	$X \bullet (1 + Y) = X \bullet (1)$
Identitat (1)	$X \bullet (1) = X$

ETC - Teoremes de l'Àlgebra de Boole

Demostració tabular de la Llei de Morgan

$(X + Y)' = X' \bullet Y'$

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X+Y}$	$\overline{X}\bullet\overline{Y}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0

$(X \bullet Y)' = X' + Y'$

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X\bullet Y}$	$\overline{X}+\overline{Y}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0

La Llei de Morgan es pot utilitzar per convertir expressions AND/OR a expressions OR/AND

Ex:

$Z = A'\,B'\,C + A'\,B\,C + A\,B'\,C + A\,B\,C'$

$Z' = (A + B + C') \bullet (A + B' + C') \bullet (A' + B + C') \bullet (A' + B' + C)$

ETC - Teoremes de l'Àlgebra de Boole

Simplificació de funcions utilitzant les lleis i postulats de l'Àlgebra de Boole

Idempotència

Ex: $\mathbf{F = A'\,B\,C + A\,B'\,C + A\,B\,C' + A\,B\,C}$

$$
\begin{aligned}
&= A'\,B\,C + A\,B'\,C + A\,B\,C' + \boxed{A\,B\,C + A\,B\,C} \\
&= A'\,B\,C + A\,B\,C + A\,B'\,C + A\,B\,C' + A\,B\,C \\
&= (A' + A)\,B\,C + A\,B'\,C + A\,B\,C' + A\,B\,C \\
&= (1)\,B\,C + A\,B'\,C + A\,B\,C' + A\,B\,C \\
&= B\,C + A\,B'\,C + A\,B\,C' + \boxed{A\,B\,C + A\,B\,C} \\
&= B\,C + A\,B'\,C + A\,B\,C + A\,B\,C' + A\,B\,C \\
&= B\,C + A\,(B' + B)\,C + A\,B\,C' + A\,B\,C \\
&= B\,C + A\,(1)\,C + A\,B\,C' + A\,B\,C \\
&= B\,C + A\,C + A\,B\,(C' + C) \\
&= B\,C + A\,C + A\,B\,(1) \\
&= B\,C + A\,C + A\,B
\end{aligned}
$$

Associativa

ETC - Funcions lògiques: Funcions de dues variables (I)

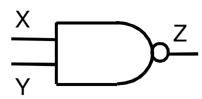
Amb dues variables, existeixen 16 possibles funcions:

X	Y	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		0	X • Y		X		Y		X + Y			$\overline{Y}$		$\overline{X}$			1

F14:

NAND

Descripció:
Z = 1 if X or Y
(or both) are 0

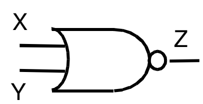


X	Y	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

F8:

NOR

Descripció:
Z = 1 if both X
and Y are 0



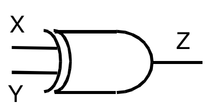
X	Y	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

ETC - Funcions lògiques: Funcions de dues variables (II)

F6:

XOR

Descripció:
Z = 1 Si X és diferent que Y



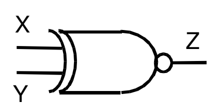
X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$X \oplus Y = X\,Y' + X'\,Y$$

F9:

XNOR

Descripció:
Z = 1 Si X és igual que Y



X	Y	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\overline{X \oplus Y} = X\,Y + X'\,Y'$$

ETC - Funcions lògiques: Formes Canòniques (I)

Suma de productes (Sumatori de mínterms)

A	B	C	F	$\overline{F}$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

$$\begin{array}{ccccccccc} & 0\,1\,1 & & 1\,0\,0 & & 1\,0\,1 & & 1\,1\,0 & 1\,1\,1 \\ F = & A'\,B\,C & + & A\,B'\,C' & + & A\,B'\,C & + & A\,B\,C' & + \; A\,B\,C \end{array}$$

$$F' = A'\,B'\,C' \;+\; A'\,B'\,C \;+\; A'\,B\,C'$$

ETC - Funcions lògiques: Formes Canòniques (II)

Suma de Productes

A	B	C	Minterms
0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = m_0$
0	0	1	$\overline{A}\,\overline{B}\,C = m_1$
0	1	0	$\overline{A}\,B\,\overline{C} = m_2$
0	1	1	$\overline{A}\,B\,C = m_3$
1	0	0	$A\,\overline{B}\,\overline{C} = m_4$
1	0	1	$A\,\overline{B}\,C = m_5$
1	1	0	$A\,B\,\overline{C} = m_6$
1	1	1	$A\,B\,C = m_7$

Terme / Mínterm:

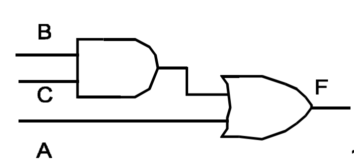
Un producte de literals (de variables) on hi intervenen totes les variables de la funció

F en Forma Canònica:

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= \Sigma m(3,4,5,6,7) \\ &= m3 + m4 + m5 + m6 + m7 \\ &= A'\,B\,C \;+\; A\,B'\,C' \;+\; A\,B'\,C \;+ \\ &\quad +\; A\,B\,C' \;+\; A\,B\,C \end{aligned}$$

Forma Canònica / Forma Mínima

$$\begin{aligned} F &= A\,B'\,(C + C') \;+\; A'\,B\,C \;+\; A\,B\,(C' + C) \\ &= A\,B' \;+\; A'\,B\,C \;+\; A\,B \\ &= A\,(B' + B) \;+\; A'\,B\,C \\ &= A \;+\; A'\,B\,C \\ &= A \;+\; B\,C \end{aligned}$$



ETC - Funcions lògiques: Formes Canòniques (III)

Producte de Sumes

A	B	C	Maxterms
0	0	0	$A + B + C = M_0$
0	0	1	$A + B + \overline{C} = M_1$
0	1	0	$A + \overline{B} + C = M_2$
0	1	1	$A + \overline{B} + \overline{C} = M_3$
1	0	0	$\overline{A} + B + C = M_4$
1	0	1	$\overline{A} + B + \overline{C} = M_5$
1	1	0	$\overline{A} + \overline{B} + C = M_6$
1	1	1	$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = M_7$

Maxterm:

Un terme expressat com a suma de literals on cada variable apareix una i només una vegada, ja sigui negada o sense negar.

Com buscar els maxterms:

Buscar a la taula de veritat les files on F és 0
- 0 implica variable (columna) sense negar
- 1 implica variable (columna) negada

F(A,B,C) = ΠM(0,1,2)
= (A + B + C) (A + B + C') (A + B' + C)

F'(A,B,C) = ΠM(3,4,5,6,7)
= (A + B' + C') (A' + B + C) (A' + B + C') (A' + B' + C) (A' + B' + C')

ETC - Funcions lògiques: Formes Canòniques (IV)

Suma de Productes, Productes de Sumes i Llei de Morgan

Partint d'una Suma de Mínterms

F' = A' B' C' + A' B' C + A' B C'

Aplicant la Llei de Morgan:

(F')' = (A' B' C' + A' B' C + A' B C')'

F = (A + B + C) (A + B + C') (A + B' + C)

Partint d'un Producte de Màxterms

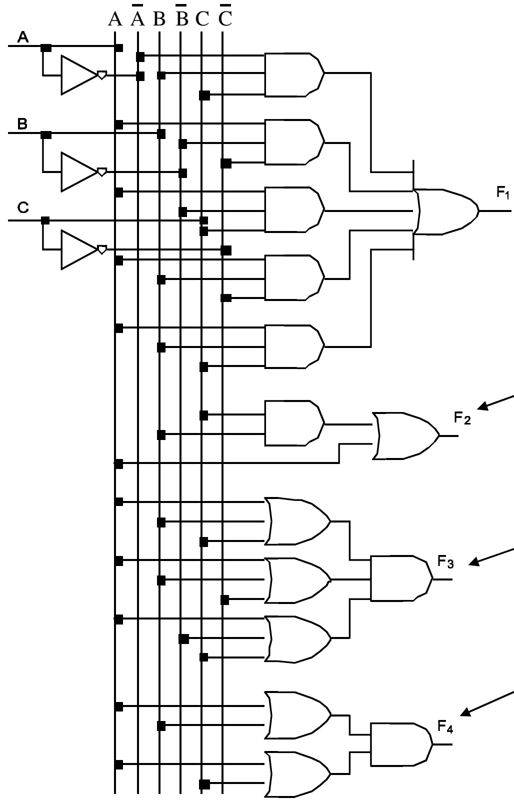
F' = (A + B' + C') (A' + B + C) (A' + B + C') (A' + B' + C) (A' + B' + C')

Aplicant la Llei de Morgan:

(F')' = {(A + B' + C') (A' + B + C) (A' + B + C') (A' + B' + C) (A' + B' + C')}'

F = A' B C + A B' C' + A B' C + A B C' + A B C

ETC - Funcions lògiques: Formes Canòniques i portes



Representació de **F** en portes, quatre alternatives:

Sumatori de Mínterms

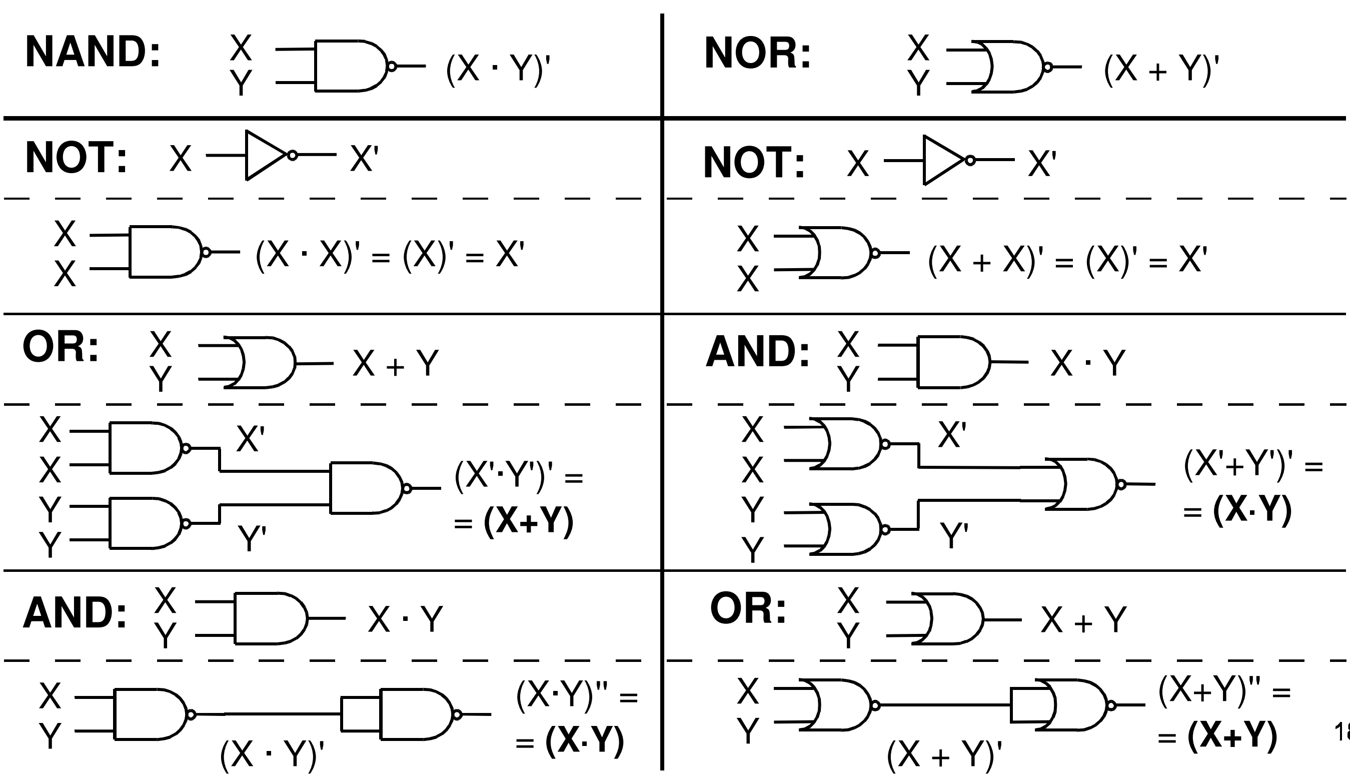
Suma de Productes **Minimitzada**

Producte de Màxterms

Producte de Sumes **Minimitzat**

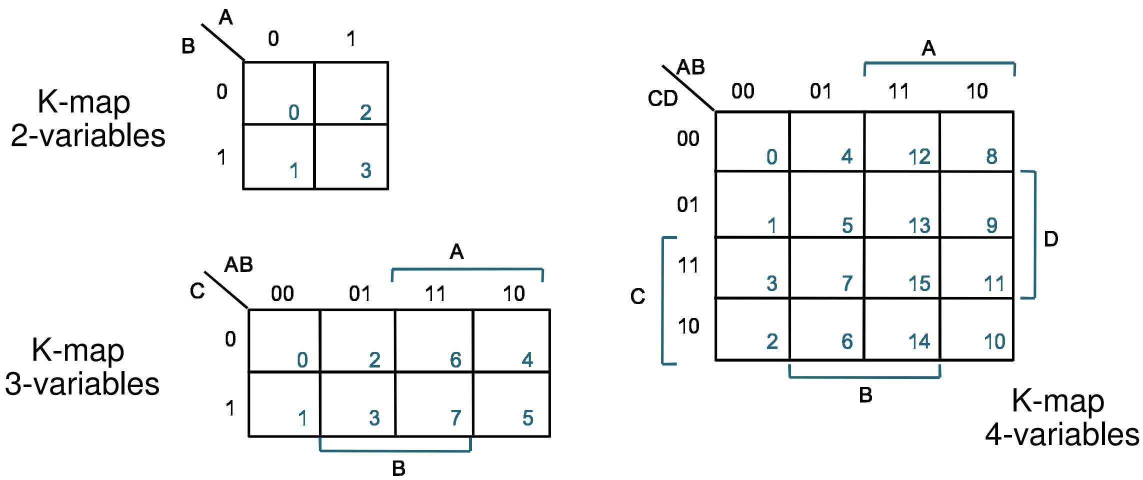
ETC - Suficiències: AND-OR-NOT; NAND; NOR

Amb portes NAND o NOR es pot implementar tota l'Àlgebra de Boole



ETC - Simplificació de funcions: Mapes de Karnaugh (I)

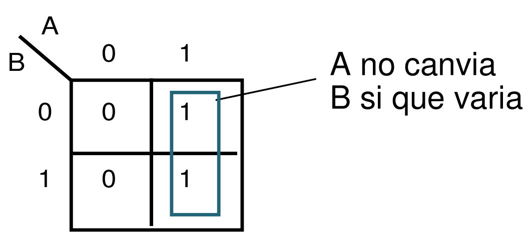
El **mapa de Karnaugh** (K-map) és un mètode alternatiu que ajuda a visualitzar adjacències i simplificar funcions de forma intuïtiva i ràpida.



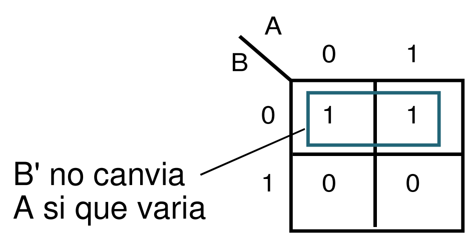
***ATENCIÓ**: l'esquema numèric és* 00, 01, 11, 10.
<u>Això és el **Codi Gray:**</u> del codi d'un valor al següent només canvia un bit.
Aquest codi numèric s'anomena reflexat per l'efecte mirall.

ETC - Simplificació de funcions: Mapes de Karnaugh (II)

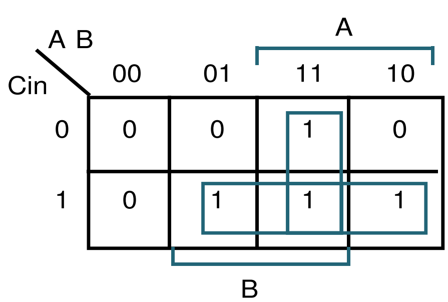
Com buscar adjacències en el K-Map?



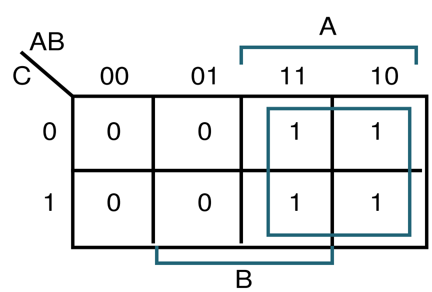
F (A, B) = ?



G = F (A, B) = ?



Cout = F (A, B, Cin) = ?



F (A, B, C) = ?

ETC - Simplificació de funcions: Mapes de Karnaugh (III)

Simplificació a partir de les adjacències:

B \ A	0	1
0	0	1
1	0	1

F (A, B) = A

B \ A	0	1
0	1	1
1	0	0

G = F (A, B) = B'

Cin \ A B	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

Cout = F (A, B, Cin) = A · B + B · Cin + A · Cin

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1

F (A, B, C) = A

ETC - Simplificació de funcions: Mapes de Karnaugh (IV)

Exemples amb 3 Variables (I):

C \ AB	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1

F(A, B, C) = Σm(0, 4, 5, 7)

F = ?

C \ AB	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	0	0

F' Simplement canvia 1s per 0s i viceversa:

F'(A, B, C) = Σm(1, 2, 3, 6)

F' = ?

ETC - Simplificació de funcions: Mapes de Karnaugh (V)

Exemples amb 3 Variables (II):

C \ AB			A	A
	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
		B	B	

F(A, B, C) = Σm(0, 4, 5, 7)

F = B' C' + A C

Les adjacències del K-map també es poden agafar seguint l'efecte mirall

C \ AB			A	A
	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	0	0
		B	B	

F'(A, B, C) = Σm(1, 2, 3, 6)

F' = B C' + A' C

ETC - Simplificació de funcions: Mapes de Karnaugh (VI)

Exemple amb 4 Variables (I):

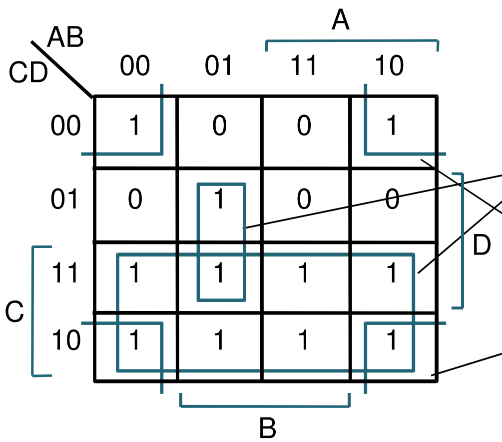
	CD \ AB			A	A	
		00	01	11	10	
	00	1	0	0	1	
	01	0	1	0	0	D
C	11	1	1	1	1	D
C	10	1	1	1	1	
			B	B		

F(A, B, C, D) = Σm(0, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 14,15)

F = ?

ETC - Simplificació de funcions: Mapes de Karnaugh (VII)

Exemple amb 4 Variables (II):



$F(A, B, C, D) = \Sigma m(0, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 14, 15)$

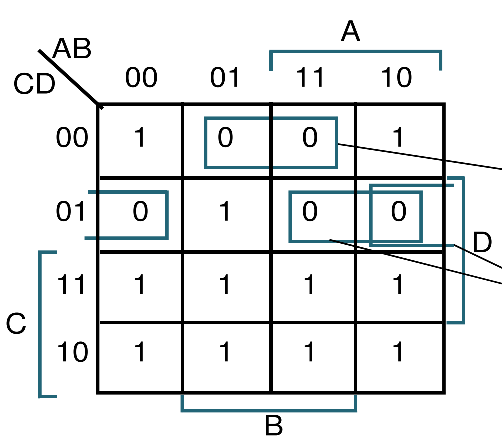
$F = C + A' B D + B' D'$

FILOSOFIA:

- Agafar <u>tots</u> els 1s en grups.
- Els grups han de ser com més grans millor.
- No importa agafar dues o més vegades un mateix 1.
- Obtenir el número mínim de grups.

ETC - Simplificació de funcions: Mapes de Karnaugh (VIII)

Mètode de Karnaugh: Agafant els Zeros



$F = (\overline{B} + C + D)\,(\overline{A} + C + \overline{D})\,(B + C + \overline{D})$

ETC - Simplificació de funcions: Mapes de Karnaugh (IX)

Els termes **don't care** poden ser tractats com 1s o 0s segons la conveniència

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	X	0
01	1	1	X	1
11	1	1	0	0
10	0	X	0	0

$F(A, B, C, D) = \Sigma m(1, 3, 5, 7, 9) + \Sigma d(6, 12, 13)$

F = A' D + B' C' D **sense don't cares**

F = C' D + A' D **amb don't cares**

S'agafa aquest **don't care** com un "1"

Agafant els Zeros

F(A, B, C, D) = M(0, 2, 4, 8, 10, 11, 14, 15) ·
· d(6, 12, 13)

F = D (A' + C') **amb don't cares**

S'agafen aquests **don't care** com a "0"

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	X	0
01	1	1	X	1
11	1	1	0	0
10	0	X	0	0